Centrale-Supélec

Concours

Rapport du jury

Filière MP

2010

études scientifiques des candidats.

Mathématiques II

Présentation de l'épreuve

L'épreuve de Maths II est une épreuve de mathématiques assistée par ordinateur, en l'occurrence par l'usage d'un logiciel de calcul formel. Elle comporte un seul exercice qui est préparé pendant 30 minutes avec accès libre à l'ordinateur ; puis le candidat vient présenter pendant 30 minutes ses résultats et poursuivre la résolution de l'exercice au tableau.

Une fois au tableau, il est souhaitable d'indiquer succinctement les questions qui ont été élucidées pendant la préparation et ensuite de ne pas trop perdre de temps sur les questions élémentaires, pour arriver au coeur du sujet. De façon générale, le candidat doit être très attentif aux conseils et *a fortiori* aux indications données oralement, et surtout de ne pas s'enfermer dans une tentative de résolution si l'examinateur lui indique qu'elle risque de conduire à une impasse : on aboutit à un échec donc à une perte de temps qui empêchera la résolution d'autres questions. Il est essentiel que l'oral reste un dialogue, et une très bonne note peut être attribuée à un candidat qui, sans avoir résolu l'exercice lors de la préparation, aura montré une bonne réactivité aux indications proposées.

Une des difficultés de cette épreuve est de savoir gérer l'aide que peut apporter le logiciel pour résoudre la question mathématique posée. Les exercices comportent pour la plupart au moins une question à résoudre avec l'outil informatique. Il est souvent attendu de pouvoir émettre une conjecture, qui sera démontrée dans la suite de l'exercice. Parfois, l'énoncé conseille d'utiliser le logiciel à bon escient au cours de l'exercice, sans qu'il soit imposé pour une question précise : il revient alors au candidat d'évaluer les questions où l'ordinateur lui apportera une aide précieuse. C'est par exemple le cas pour des calculs auxiliaires de développements limités ou d'intégrales élémentaires (coefficients de Fourier ...), ou des résolutions d'équations lors d'un exercice de géométrie : le logiciel permet d'alléger les calculs et d'éviter les erreurs liées au stress de l'épreuve. Il faut par contre savoir être circonspect sur certaines réponses du logiciel : que penser d'un candidat qui ne réagit pas face à l'affichage de valeurs propres « complexes » pour une matrice symétrique réelle, alors qu'une demande de valeurs approchées montre que leurs parties imaginaires sont des 10^(-6)*I ? Il ne s'agit pas là de savoir comment fonctionne le logiciel mais d'avoir un minimum de recul ou de prudence sur l'affichage de certains résultats.

Analyse globale des résultats

Les résultats sont globalement satisfaisants. L'écart-type assez important suggère cependant une grande diversité dans le comportement et les capacités des candidats, en particulier face à l'usage du logiciel de calcul formel.

Par commodité, examinons séparément la part de l'outil informatique et celle qui relève de l'aptitude mathématique seule, tout en reconnaissant que les deux aspects sont très liés au cours de l'épreuve.

Commentaires et conseils concernant l'usage du logiciel de calcul formel

L'impression générale est ici un peu mitigée. Et il semble utile de redonner une liste de « savoir-faire » déjà publiée dans le rapport 2009 et qui figure en **Annexe**.

Le jury a vu avec plaisir environ un quart des candidats très bien préparés, très à l'aise avec cet aspect de l'épreuve. Une majorité a montré l'habitude de côtoyer le logiciel et la connaissance des commandes usuelles. Signalons qu'il n'est d'ailleurs attendu ni dextérité ni connaissance savante des options possibles d'une fonction prédéfinie ; et il est normal et raisonnable qu'un candidat s'assure du bon emploi d'une fonction du logiciel en ayant recours à l'aide en ligne (encore faut-il en connaître le nom... : alors pourquoi se priver très souvent de l'affichage à l'écran des fonctions résidant dans une librairie, par un with(…) : au lieu d'un with(…) ; du logiciel Maple ?).

Par contre, il faut constater et regretter qu'un trop grand nombre –même si c'est une minorité– continue à espérer découvrir les fonctions de base avec un usage fébrile de l'aide en ligne pendant la préparation : cela se traduit par une lourde perte de temps, et le bilan est en général catastrophique : aucun résultat ne sort d'une succession de lignes de code dont la plupart ont été rejetées par le logiciel…. À la moindre sollicitation de l'examinateur pour apporter les premières modifications permettant l'obtention d'au moins un résultat partiel (faute de temps, il ne peut être question de corriger les fautes accumulées), la réponse « je n'ai pas pratiqué le logiciel cette année » ne peut constituer une excuse. L'usage d'un logiciel de calcul formel figure pour tous, au programme des deux années de classes préparatoires, et les candidats savent qu'ils en auront besoin lors de l'épreuve de maths II du concours Centrale. Le jury sanctionnera plus nettement cette attitude désinvolte : on ne peut pas arriver à cette épreuve si on ne sait pas utiliser efficacement le logiciel.

Le peu de programmation attendue ne dépasse pas l'écriture de boucles avec d'éventuelles instructions conditionnelles ! Il ne s'agit pas d'un exercice d'algorithmique.

Relevons quelques pratiques maladroites.

On regrette d'abord un recours trop systématique à l'écriture de nombreuses et inutiles procédures, quelle que soit la complexité de la question posée : cette démarche peut sembler tout à fait honorable, mais conduit trop souvent hélas à un échec, et donc à l'absence de résultats effectifs ; or c'est le but attendu. Et puis c'est une mauvaise compréhension de l'intérêt d'un logiciel de calcul formel : les fonctions prédéfinies sont là pour gagner du temps, et écrire une procédure pour définir la fonction « factorielle » (exemple caricatural mais vu cette année) n'a aucun intérêt ici. En fait, il est rarement indispensable d'écrire une procédure lors des questions proposées, ce qui ne signifie pas qu'elles sont parfois bienvenues ; mais l'écriture directe d'une boucle est souvent suffisante.

Il est nécessaire de savoir distinguer la manipulation des « fonctions » et des « expressions », et d'estimer quand l'usage des unes ou des autres est plus favorable. Signalons que l'usage des expressions est souvent plus souple lorsqu'il doit se doubler de la création d'un opérateur mathématique qui manipule ces expressions.

Certains ne savent d'ailleurs pas créer une suite, ou une fonction ; l'usage des crochets ou des parenthèses est mal compris: u[n] ou u(n) ? Et plus gênant encore est de voir écrire des tentatives du type u(n):= … ou f(x):= … pour fabriquer une fonction, et des candidats qui sont surpris que le logiciel ne réponde pas à leur attente !!

Le logiciel met à disposition des outils commodes pour créer des séquences de résultats. Combien de fois on a vu le recours à des copier-coller quand l'énoncé demandait une séquence d'une dizaine ou d'une vingtaine de résultats (nécessaires à l'ébauche d'une conjecture « fiable ») ?

Il faut enfin savoir indiquer au logiciel qu'une variable est par exemple entière, réelle positive, etc… Et connaître quelques commandes qui simplifient ou convertissent ou transforment des expressions sous une forme souhaitée.

Mais voici quelques points encore trop mal maîtrisés :

- la construction de matrices de taille variable. Il faut savoir fabriquer une fonction « définissante » des coefficients. On a ainsi vu régulièrement des candidats contraints d'écrire une matrice 10*10 en tapant les 100 coefficients (dont beaucoup étaient nuls heureusement) !
- savoir obtenir des valeurs approchées des racines d'une équation, savoir que l'affichage d'un seul résultat numérique ne se traduit pas nécessairement par l'unicité d'une solution… ;
- pour le graphisme, il faut savoir superposer sur un même schéma divers types de graphes ;
- dans le cas particulier des équations différentielles, beaucoup ne savent pas visualiser le graphe d'une solution, lorsque le logiciel n'en donne pas une expression exacte.

Et deux remarques spécifiques au logiciel Maple,

- proscrire l'ouverture et l'usage simultanés des librairies Maple **linalg** ET **LinearAlgebra** ;
- connaître les inconvénients ou avantages respectifs des commandes « sum » et « add » …

Commentaires et conseils concernant la partie mathématique

Indiquons d'abord que le jury a été surpris par une connaissance parfois trop approximative du cours (aussi bien pour les définitions que les théorèmes) : certains semblent se satisfaire d'une « approche intuitive », en sachant qu'il existe un théorème ad'hoc ; mais, en exiger des hypothèses précises semble relever de l'excès de curiosité de la part du jury. Jury qui a donc décidé d'être plus exigeant sur la bonne connaissance du cours. Il est normal par exemple qu'en arrivant au tableau après 30 minutes de travail sur les séries de Fourier, le candidat soit prêt à donner un énoncé correct du ou des théorèmes utilisés sur ce sujet…

On regrette aussi que trop d'erreurs soient commises sur des connaissances techniques élémentaires : fautes très fréquentes sur les premiers termes de développements limités usuels comme ceux des fonctions sin, x->ln(1+x) etc, sur la primitivation de fonctions ordinaires, sur les formules de trigonométrie les plus classiques… Une demande de vérification de la part de l'examinateur doit être suivie d'une correction rapide, sinon elle ne peut pas être seulement imputée au stress de la situation !

Passons en revue quelques lacunes sur les diverses parties du programme :

- en algèbre « générale » (arithmétique, algèbre des polynômes, structures algébriques), pour l'arithmétique dans **Z**, on aimerait que le passage à la seule structure quotient du programme **Z/nZ** soit plus naturel ; l'équation diophantienne la plus élémentaire $ax + by = c$ ne va pas sans difficultés. La notion de partie génératrice d'un groupe est souvent ignorée ;
- en algèbre linéaire, l'usage du logiciel favorise naturellement les questions formulées dans un environnement matriciel ; il ne faut pas oublier cependant qu'une vision vectorielle / géométrique est souvent indispensable à une bonne résolution. Et ce n'est pas parce que le logiciel de calcul formel aura factorisé commodément un polynôme caractéristique que cette voie sera le meilleur moyen dans le cas général pour raisonner sur la réduction d'un endomorphisme. Comme les années précédentes, le travail avec les polynômes d'endomorphisme reste mal assimilé : on retrouve l'inévitable faute Q(u(x)) pour Q(u)(x), et ses conséquences, le lemme des noyaux est oublié, ou son usage mal perçu. Même le calcul classique des puissances d'une matrice par division euclidienne n'a pas été toujours satisfaisant ;
- en algèbre euclidienne, le problème de la distance à un sous-espace de dimension finie n'est pas toujours reconnu, et le théorème est mal énoncé, voire mal compris. *A contrario*, certains problèmes de distance à une partie compacte ont été « résolus » en invoquant le théorème précédent.

Plus surprenant est la méconnaissance d'objets courants comme les rotations (vectorielles) de R^3, ou le groupe SO2(R) avec son paramétrage usuel.

Les questions de géométrie élémentaire du plan (coniques, droites, distances…) révèlent à nouveau le désintérêt pour cette partie du programme ; il n'est pas acceptable de ne pas obtenir rapidement l'équation d'une droite passant par deux points ou donnée par un point et un vecteur normal ou directeur. Sans parler des droites de R^3… Notons que c'est un domaine où il est commode de mener les calculs –rapidement lourds s'ils sont pratiqués 'à la main'– avec l'ordinateur.

Les études de suites et de séries qu'on pourraient considérer comme relevant de situations bien connues, sont loin de donner satisfaction ; c'est le cas en particulier des suites récurrentes. Pour les séries, la considération du signe n'arrive qu'après une sollicitation expresse de l'examinateur… Quant à l'obtention de développements asymptotiques, on aimerait que les candidats disposent de quelques idées dont ils puissent faire part, avant qu'il soit nécessaire de leur souffler une piste convenable.

Pour les suites et séries de fonctions, il faut être plus rigoureux avec les notions de convergence : bien préciser l'intervalle (ou le domaine…) sur lequel on se place, ne pas confondre convergence uniforme et convergence normale, écrire des majorations précises et ne pas passer trop vite à l'usage d'un équivalent. Les séries entières et les séries de Fourier sont assez bien manipulées. On regrette cependant comme on l'a signalé plus haut, l'imprécision de certains énoncés de théorèmes…

Les fonctions définies par des intégrales, l'étude de suites d'intégrales ou le développement d'une intégrale à paramètre comme somme d'une série forment une partie majeure du programme d'analyse. Et pourtant, on a trop de réponses à l'emporte-pièce avec un 'par convergence dominée' mis à toutes les sauces, sans justification claire, et qui semble suffire à certains.

En calcul différentiel, on aimerait une plus grande familiarité avec les notions de difféomorphismes (même à une variable), et de gradient. Dans les problèmes d'extremums, il faut savoir faire la part des arguments de topologie (continuité-compacité) et de calcul différentiel.

Pour les équations différentielles linéaires, l'usage du logiciel n'interdit pas que soit exigée la mise en oeuvre de la méthode de variation des constantes, encore mal comprise. Les équations différentielles non linéaires nécessitent des arguments souvent délicats, et il a été constaté une amélioration dans ce domaine; mais la première chose attendue est un énoncé précis du théorème de Cauchy-Lipschitz adapté au problème proposé. Il n'est pas rare d'entendre des hypothèses les plus farfelues, par exemple de voir porter le caractère « C1 » sur la fonction $x \in I$ -> *(fx, y(x))* où (I, y) est justement la solution à étudier !! Le raisonnement classique sur un éventuel prolongement d'une solution ne doit pas s'arrêter à un prolongement par continuité. Les arguments liés à la monotonie d'une solution par une lecture directe du signe de la fonction dérivée ne sont pas assez exploités.

Enfin, la géométrie différentielle n'est pas mieux traitée que la géométrie « algébrique »… Pour les courbes planes, la notion de courbure –limitée à la stricte connaissance du programme– et parfois même celle d'abscisse curviligne qui font pourtant l'objet d'une reprise en 2e année sont mal connues. Concernant les surfaces, la notion de gradient est parfois utilisée pour une surface paramétrée !!

Conclusion

Cette liste de remarques n'a pour but que d'aider les candidats dans leur préparation à cette épreuve spécifique de mathématiques. C'est par l'usage régulier d'un logiciel de calcul formel, tout au cours de l'année, aussi naturellement qu'on ouvre une calculatrice numérique en sciences physiques, qu'on sera le mieux à même de réussir cette épreuve. Et le jury a apprécié les étudiants, en nombre croissant, qui ont fait cet effort et ont acquis une véritable aisance avec l'outil informatique.

Signalons que plusieurs énoncés de sujets proposés à cette session 2010 seront publiés sur le site du Concours.

Annexe : liste de savoir-faire conseillés pour l'épreuve assistée par un logiciel de calcul formel

Calcul algébrique (entiers, polynômes, équations) **:**

- savoir calculer le quotient, le reste dans une division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}[X]$;
- savoir tester qu'un entier est premier, savoir travailler mod *n* ;
- savoir factoriser (dans $\mathbb{Q}[X]$ et éventuellement dans une extension simple suggérée par l'énoncé), développer, ordonner un polynôme ;
- savoir obtenir tous les coefficients, ou des coefficients précis d'un polynôme ;
- savoir calculer le pgcd de deux entiers, de deux polynômes ;
- savoir obtenir un couple donnant la relation de Bézout ;
- savoir déterminer les racines d'une équation (algébrique ou non) de façon exacte, de façon approchée; savoir déterminer une valeur approchée d'une racine localisée dans un intervalle ;
- savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{Q}(X)$ (éventuellement dans une extension simple de $\mathbb{Q}$ suggérée par l'énoncé).

Calcul matriciel :

- savoir construire une matrice dont les coefficients sont donnés par une formule fonction du couple *(i, j)*, et dont la taille peut être variable (il ne peut être question de se limiter à savoir entrer une matrice 3x3 par ses neuf coefficients) ;
- savoir calculer des produits matriciels, créer une matrice diagonale et *a fortiori* la matrice identité, former la transposée ;
- savoir calculer le rang, le noyau ou l'image (en obtenant une base de ces sous-espaces) ;
- savoir calculer le déterminant, éventuellement l'inverse, la comatrice (ou sa transposée) d'une matrice carrée ;

- savoir calculer le polynôme caractéristique d'une matrice carrée, ses valeurs propres, ses vecteurs propres ;
- savoir résoudre une équation d'inconnue matricielle (après l'avoir transformée en un ensemble d'équations scalaires d'inconnues les coefficients) ;
- savoir calculer le produit scalaire, le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, calcul différentiel, calcul intégral :

- savoir composer des fonctions (ou des opérateurs), calculer des dérivées d'ordre supérieur à un ;
- savoir calculer un développement limité, savoir extraire la partie régulière d'un tel développement ;
- savoir calculer une intégrale de façon exacte, de façon approchée, faire un changement de variable ou une intégration par parties ;
- comprendre pourquoi le logiciel n'affiche pas toujours une limite explicite, ou le résultat d'un calcul d'intégrale, par manque d'information sur la nature d'un paramètre introduit : savoir préciser à quelle partie de $\mathbb{R}$ il appartient (entier, réel positif…)

Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions :

- savoir expliciter les premiers termes (de façon exacte ou approchée) d'une suite numérique ou d'une suite de fonctions, en particulier lorsqu'elle est définie par récurrence ;
- savoir obtenir un développement asymptotique d'une suite (fonction explicite de n) ;
- savoir calculer les coefficients de Fourier d'une fonction périodique ;
- savoir visualiser sur un même schéma les premiers termes d'une suite de fonctions.

Équations différentielles :

- savoir résoudre une équation différentielle, un système d'équations différentielles, avec ou sans conditions initiales ;
- savoir récupérer une fonction solution et la tracer ;
- savoir tracer directement le graphe d'une solution obtenue par résolution numérique.

Graphisme (on a déjà évoqué le tracé de graphes de fonctions d'une variable réelle, de solutions d'une équation différentielle) **:**

- savoir tracer une courbe du plan, définie par une équation cartésienne (de façon implicite), ou par un paramétrage, peut-être en coordonnées polaires, et gérer les discontinuités ;
- savoir tracer une courbe paramétrée de l'espace ;
- savoir tracer une surface définie par un paramétrage, ou par une équation cartésienne ;
- savoir visualiser un ensemble de points, sous forme d'une ligne polygonale ou non.