

Nous utiliserons la bibliothèque LinearAlgebra (que l'on charge par la commande `with(LinearAlgebra)`). Ne pas hésiter à consulter l'aide en ligne.

Bien que l'étude des espaces préhilbertiens complexes et hermitiens soient aux programmes dans votre filière, nous nous limiterons dans ce TP au cas réel.

Orthonormalisation, projections orthogonales

On rappelle tout d'abord le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Si (b_1, \dots, b_n) est une famille libre dans un espace préhilbertien réel E dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et la norme euclidienne $\| \cdot \|$, elle consiste à construire la famille (e_1, \dots, e_n) définie par :

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{cases} v_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_k | e_i \rangle \cdot e_i \\ e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|} \end{cases}$$

Cette nouvelle famille possède les propriétés suivantes :

- elle est orthonormale ;
- pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\text{Vect}(b_1, \dots, b_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , cette méthode permet en particulier de transformer une base quelconque de F en une base orthonormale.

On rappelle ensuite que si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et que (e_1, \dots, e_n) en est une base orthonormale de F (par exemple obtenue par le procédé de Schmidt mais ce n'est pas une obligation) alors pour tout vecteur $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est donné par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \cdot e_i$$

Enfin, on rappelle que la distance entre un vecteur x de E et un sous-espace F de dimension finie de E est donnée par :

$$d(x, F) \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{y \in F} d(x, y) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

□ **Exercice 1** - Une orthonormalisation dans \mathbb{R}^5

Dans l'espace \mathbb{R}^5 muni de sa structure euclidienne canonique, on considère les vecteurs suivants :

$$b_1 = (1, 1, -1, 0, 2)$$

$$b_2 = (0, 1, -1, -1, 0)$$

$$b_3 = (0, 0, 1, 1, -1)$$

$$b_4 = (-1, 0, 0, 1, 1)$$

$$b_5 = (1, -1, 2, 0, 1)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_5)$ est une base de \mathbb{R}^5 .
2. Orthonormaliser cette base par le procédé de Schmidt afin d'obtenir une base orthonormale $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_5)$.

Mots clefs : $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle$, *Determinant*, *add*, *DotProduct*, *Norm(,2)*

□ **Exercice 2** - Matrice d'une projection orthogonale

Dans l'espace \mathbb{R}^5 muni de sa structure euclidienne canonique, on considère le sous-espace F d'équations :

$$\begin{cases} x - y - 2z + 5t + u = 0 \\ x - 3y - z + 2t + u = 0 \end{cases}$$

1. Quelle est la dimension de F . En donner une base \mathcal{B} .
2. Orthonormaliser la base précédente afin d'obtenir une base orthonormale \mathcal{C} de F .
3. Pour tout vecteur $X = (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5$, déterminer le projeté orthogonal de X sur F (en fonction de x, y, z, t, u).
4. En déduire la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^5 de la projection orthogonale sur F .
5. Donner également la matrice B dans la base canonique de \mathbb{R}^5 de la symétrie orthogonale par rapport à F . Vérifier que B est bien symétrique et que c'est bien une symétrie (c'est à dire que $B^2 = I_5$).

Mots clefs : $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $\langle \cdot | \dots | \cdot \rangle$, *solve*, *subs*, *add*, *DotProduct*, *Norm(,2)*

□ **Exercice 3** - *Un calcul de distance*

Soit E l'ensemble des applications continues de $[-1, 1]$ dans lui-même et F_n son sous-espace constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n (n étant un entier naturel). On définit alors l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

1. Question mathématique (sans Maple) : justifier que ϕ est un produit scalaire sur E (on commencera par justifier la convergence de cette intégrale impropre).
2. Définir deux fonctions Maple permettant de calculer un produit scalaire ou une norme (on préférera la notion d'*expression* à celle de *fonctions* pour représenter les éléments de E).
3. À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer une base orthonormale de F_5 (pour le produit scalaire ϕ).
4. Déterminer le projeté orthogonal de $h : t \mapsto t^{11}$ sur le sous-espace F_5 .
5. En déduire la valeur de :

$$\delta = \min_{(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6} \int_{-1}^1 \frac{(t^{11} - at^5 - bt^4 - ct^3 + dt^2 + et + f)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Indication : δ est exactement le carré de la distance entre h et le sous-espace vectoriel F_5 .

Mots clefs : *int, sqrt, for, add*

Automorphismes orthogonaux, rotations en dimension 3

Si E est un espace euclidien, on rappelle que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme orthogonal s'il conserve le produit scalaire. Si \mathcal{B} est une base orthonormale de E , cela est équivalent au fait que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale, c'est à dire ${}^t A.A = I_n$ (où $n = \dim(E)$).

En dimension 3, on rappelle que les automorphismes orthogonaux sont : l'identité, les réflexions, les rotations et les antirotations (composée commutative d'une rotation et d'une réflexion d'axes orthogonaux).

Toujours en dimension 3, on rappelle que si f est la rotation d'angle θ et d'axe dirigée par u (non nul) alors :

- $\text{Tr}(f) = 1 + 2 \cos(\theta)$
- Si x est un vecteur non colinéaire à u alors $\sin(\theta)$ et du même signe que

$\text{Det}(u, x, f(x))$

- La matrice de f dans une base orthonormale adaptée est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

□ **Exercice 4**

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est la suivante :

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 & 1 \\ -1 & 1 + \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 \\ -\sqrt{3} + 1 & -1 & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale et donc que f est automorphisme orthogonal de \mathbb{R}^3 .
2. Interpréter géométriquement f , en donnant ses éléments caractéristiques.

Mots clefs : *Matrix, Transpose, NullSpace, IdentityMatrix, Trace, Determinant, simplify*

□ **Exercice 5**

Soit f la rotation (vectorielle) de \mathbb{R}^3 d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ et dont l'axe est dirigé par le vecteur $u = (1, 2, 3)$.

1. Construire une base orthonormale $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ adaptée à f avec e_1 dirigeant l'axe.
2. Donner la matrice B de f dans la base \mathcal{C} .
3. En déduire la matrice A de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Mots clefs : *<, ..., >, < |...| >, Norm(,2), CrossProduct, Matrix, Tranpose, simplify*

Décomposition QR d'une matrice inversible

On peut démontrer qu'une matrice inversible $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Si on n'impose pas aux éléments diagonaux de R d'être strictement positifs, on perd l'unicité mais tous les signes sont possibles (autrement dit il y a alors 2^n décompositions possibles).

Remarque - De même une matrice inversible $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire de manière unique $A = QR$ avec Q unitaire et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Pour simplifier, nous nous limiterons au cas réel.

Plusieurs méthodes, constructives, peuvent être utilisées pour obtenir la décomposition QR d'une matrice donnée :

- une adaptation du procédé de Schmidt, appliquée aux vecteurs colonnes de A ;
- la méthode de Householder utilisant des matrices de réflexions ;
- la méthode de Givens utilisant des matrices de rotations.

Nous nous limiterons à l'étude des deux premières méthode. Avant de rentrer dans le détail, notons que la première méthode est connu pour être instable numériquement (ce qui n'est pas le cas des deux autres).

Décomposition QR par orthonormalisation de Schmidt

Notons $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ les vecteurs de \mathbb{R}^n représentés par les colonnes de A . Autrement dit on a $A = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$.

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt permet de construire une base orthonormale $\mathcal{D} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n telle que :

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(b_1, \dots, b_k)$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e_k | b_k \rangle$ soit strictement positif

Si on note $Q = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ et $R = \text{Pass}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ on a alors les propriétés suivantes :

1. Q est orthogonale (car c'est la matrice de passage entre deux bases orthonormales)
2. R est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive (cela provient du procédé de Schmidt) et on a même, en conservant les notations précédentes :

$$\begin{cases} b_1 = \|b_1\| e_1 \\ \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, b_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_k | e_i \rangle e_i + \|v_k\| e_k \end{cases}$$

ce qui peut se résumer matriciellement par :

$$R = \begin{bmatrix} \|b_1\| & \langle b_2 | e_1 \rangle & \dots & \langle b_k | e_1 \rangle & \dots & \langle b_n | e_1 \rangle \\ & \|v_2\| & & \langle b_k | e_2 \rangle & \dots & \langle b_n | e_2 \rangle \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & \|v_{k-1}\| & \langle b_k | e_{k-1} \rangle & \dots & \langle b_n | e_{k-1} \rangle \\ & & & & \|v_k\| & \dots & \langle b_n | e_k \rangle \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \|v_n\| \end{bmatrix}$$

3. $QR = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \text{Pass}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = A$

Exercice 6

1. Écrire une procédure QRSchmidt(A) prenant comme argument une matrice inversible A et qui retourne sa décomposition QR sous la forme d'une liste $[Q, R]$ en adaptant le procédé de Schmidt (par rapport à l'algorithme usuel, on rajoutera la construction progressive de la matrice R initialisée à la matrice nulle en début de procédure).

Remarque - Si A n'est pas inversible, on fera en sorte que la procédure déclenche une erreur à l'aide de la commande `error`.

2. Tester cette procédure sur quelques matrices aléatoires, que vous pourrez obtenir par la commande `RandomMatrix(n, n, generator=a..b)`.
3. Tester cette procédure avec la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.00001 & 1.00002 & 1.00003 \\ 1.00004 & 1.00005 & 1.00006 \end{bmatrix}$$

Vérifier l'orthogonalité de la matrice Q obtenue en calculant ${}^t Q \cdot Q$. Que constatez-vous ?

Décomposition QR par la méthode de Householder

Soit x un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et X sa matrice colonne dans la base canonique de \mathbb{R}^n . La matrice de Householder associée à x est définie par :

$$H(X) = I_n - 2 \frac{X \cdot {}^t X}{\|X\|^2}$$

On peut assez facilement démontrer qu'il s'agit de la matrice de la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à x .

Pour simplifier la rédaction de qui suit on posera, par convention :

$$H(0) = I_n$$

Un petit raisonnement permet d'affirmer que si u et v sont deux vecteurs distincts de \mathbb{R}^n de même norme alors il existe une unique réflexion h de \mathbb{R}^n telle que $h(u) = v$. Précisément il s'agit de la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à $x = u - v$.

La traduction matricielle du raisonnement précédent est la suivante. Si U et V sont deux vecteurs colonnes de même norme, alors en prenant $X = U - V$ on a :

$$H(X) \cdot U = V$$

Décrivons maintenant la méthode de Householder permettant d'obtenir la décom-

position QR d'une matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{R})$ dont nous noterons C_1, \dots, C_n les colonnes. Celle-ci consiste à rendre la matrice triangulaire en la multipliant à gauche par des matrices de réflexion (donc orthogonale).

La première étape consiste à transformer la première colonne C_1 pour la rendre colinéaire au premier vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ c'est à dire la colonne :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour cela, il suffit de multiplier la matrice A à gauche par la matrice de Householder $Q_1 = H(C_1 - \|C_1\|.E_1)$. On obtient alors :

$$Q_1.A = \left[\begin{array}{c|c} \|C_1\| & \star \\ \hline 0 & A' \end{array} \right]$$

où $A' \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$.

On poursuit ensuite cette méthode en travaillant sur la première colonne C'_1 de A' à l'aide d'une matrice de Householder Q'_2 . Si on pose :

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q'_2 \end{array} \right]$$

on a alors :

$$Q_2.Q_1.A = \left[\begin{array}{cc|c} \|C_1\| & \star & \star \\ 0 & \|C'_1\| & \star \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A'' \\ 0 & 0 & \end{array} \right]$$

où $A'' \in GL_{n-2}(\mathbb{R})$.

En poursuivant ce procédé on obtient des matrices orthogonales Q_1, \dots, Q_{n-1} (qui sont soit des matrices de réflexion soit la matrice unité) telle que :

$$R = Q_{n-1} \cdots Q_1.A$$

soit triangulaire supérieure. Comme ses matrices Q_i sont des symétries ($Q_i^2 = I_n$) on en déduit que :

$$A = Q_1 \cdots Q_{n-1}.R$$

On a donc $A = QR$ en posant $Q = Q_1 \cdots Q_{n-1}$

Remarque - Le lecteur attentif aura compris que les $(n-1)$ premiers éléments diagonaux de R sont strictement positifs car ce sont des normes d'un vecteur colonne non nul (car extrait d'une matrice inversible). En revanche le dernier coefficient est lui de signe quelconque. Si celui-ci est négatif, et que l'on souhaite à tout prix obtenir des coefficients tous positifs, on terminera ce processus en multipliant par la matrice $Q_n = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1)$ (qui est orthogonale).

□ Exercice 7

1. Écrire une procédure Householder(X,n) prenant comme paramètre un vecteur colonne X de dimension p et un entier $n \geq p$ et qui retourne la matrice :

$$\left[\begin{array}{c|c} I_{n-p} & 0 \\ \hline 0 & H(X - \|X\|.E) \end{array} \right] \quad \text{où} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

2. Écrire une procédure QRHouseholder(A) prenant comme argument une matrice inversible A et qui calcule sa décomposition QR par la méthode de Householder.

Remarque - Si A n'est pas inversible, on fera en sorte que la procédure déclenche une erreur à l'aide de la commande error.

3. Tester la procédure précédente sur quelques matrices aléatoires, que vous pourrez obtenir par la commande RandomMatrix(n,n,generator=a..b).

4. Tester la procédure avec la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.00001 & 1.00002 & 1.00003 \\ 1.00004 & 1.00005 & 1.00006 \end{bmatrix}$$

Vérifier l'orthogonalité de la matrice Q obtenue en calculant ${}^tQ.Q$. Comparez le résultat avec celui obtenu par QRSchmidt.