



**lundi 10-12** ► Exercices n° 8 et 9 de la feuille n° 11 (automorphismes orthogonaux)

**Chapitre K - Intégrales à paramètre**

**N-B** Dans tout le chapitre  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est une fonction de  $I \times J$  dans  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et on s'intéresse au problème de la définition (sur  $I$ ), de la continuité, de la dérivabilité et du caractère  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) de la fonction  $F$  de la variable réelle donnée par :

$$F(x) = \int_J f(x, t) dt$$

**I - Les grands théorèmes**

**I.1 - Théorème de continuité sous le signe intégral**

Énoncé du théorème avec hypothèse de domination par une fonction positive intégrable indépendante du paramètre. Remarque : la condition de domination implique l'intégrabilité et donc l'existence de l'intégrale. Quand le théorème s'applique il est donc inutile d'étudier la convergence de l'intégrale en premier (mais on est obligé de le faire si l'intervalle  $I$  n'est pas précisé par l'énoncé).

Exemples :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad G(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x^2 + \sqrt{t}}$$

Quelques cas particuliers importants : si  $J$  est borné, une fonction dominante constante convient ; si  $I$  et  $J$  sont deux segments et  $f$  est continue sur  $I \times J$  alors elle est bornée et toutes les hypothèses sont automatiquement satisfaites.

**mardi 14-18 (TD)** ► Exemple d'utilisation avec domination locale (sur tout segment) :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$$

**I.2 - Théorème de dérivation sous le signe intégral**

Énoncé du théorème (ne pas oublier de démontrer l'intégrabilité de  $t \mapsto f(x, t)$  sur  $J$ , **qui n'est pas automatique**, et que l'hypothèse de domination concerne la dérivée partielle par rapport au paramètre  $x$ ).

Exemple :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^4} dt$$

Exercices n° 1, 2 et 3 de la feuille n° 12 (intégrales à paramètre)

**jeudi 8-11** ► Exemple d'utilisation du théorème de dérivation sous le signe intégral avec domination locale (sur tout segment) :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$$

Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  (toutes les dérivées partielles sont supposées intégrables, seule la  $k^e$  doit être dominée).

**II - Quelques exemples classiques (polycopié distribué aux élèves)**

Le but de cette partie est d'illustrer les théorèmes et méthodes de la partie précédente. Rien de ce qui est fait ici n'est exigibles des élèves.

Transformée de Laplace, fonction  $\Gamma$  d'Euler.

Exercices n° 4 et 5 de la feuille n° 12 (intégrales à paramètre)

**vendredi 10-12** ► **Chapitre L - Séries entières**

**I - Convergence d'une série entière**

**I.1 - Notion de série entière**

Définition d'une série entière  $\sum a_n z^n$  (la variable  $z$  est complexe). Vocabulaire : domaine de convergence et fonction somme. Étude de la convergence de la « série exponentielle »  $\sum \frac{z^n}{n!}$ , de la série géométrique  $\sum z^n$  ainsi que de la série  $\sum \frac{z^n}{n^2}$ . On constate que le domaine de convergence est circulaire mais que le bord peut être inclus ou exclu.

**I.2 - Rayon de convergence**

Théorème admis : il existe un unique  $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  tel que la série soit absolument convergente si  $|z| < R$  et grossièrement divergente si  $|z| > R$ . Ce nombre  $R$  est appelé rayon de convergence de la série entière. Le disque ouvert  $D(0, R)$  est appelé disque de convergence. Le cercle  $C(0, R)$  sera parfois appelé « cercle d'incertitude » (cette dénomination n'est pas universelle).

Calcul du rayon de convergence par utilisation directe de la définition : si  $\sum a_n z_0^n$  est absolument convergente alors  $|z_0| \leq R$ , si  $\sum a_n z_0^n$  est grossièrement divergente alors  $|z_0| \geq R$ , si  $\sum a_n z_0^n$  est semi-convergente alors  $|z_0| = R$ , si  $\sum a_n z_0^n$  est divergente sans être grossièrement divergente alors  $|z_0| = R$ .

Théorème de comparaison et d'équivalence pour le rayon de convergence. Utilisation de la règle de d'Alembert (aucun nouveau théorème, on se ramène à la règle usuelle concernant les séries numériques). Application de la règle de d'Alembert à des séries lacunaires, par exemples lorsque un terme sur deux est nul (ce qui fait apparaître une racine carrée dans le rayon de convergence).

**I.3 - Opérations sur les séries entières**

La multiplication par un scalaire non nul ne change pas le rayon de convergence. Rayon de convergence de la somme de deux séries entières (deux cas). Exemples.

**vendredi 14-16 (TD)** ► Exercices n° 6 et 7 de la feuille n° 12 (intégrales à paramètre)