Classe préparatoire TSI-2
Lycée Antonin Artaud
2011-2012

Devoir surveillé n° 4

Samedi 21 janvier - 4 heures

Les consignes de présentation sont les mêmes que d'habitude. En particulier : résultats encadrés, traits de séparation entre chaque question, marge à droite pour la correction.

☐ Problème 1 - *Calcul d'une somme très classique*

A - Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Pour tout réel $x > 0$ on pose alors :

$$F(x) = \int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt$$

1. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\left|F(x)\right| \leqslant \frac{K}{x}$$

où K est une constante (indépendante de x) dont on donnera la valeur en fonction de f, a et b.

2. En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

B - Un calcul d'intégrale

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$I_{\alpha,\beta}(k) = \int_0^\pi \left(\alpha t + \beta t^2\right)\cos(kt)dt$$

1. En détaillant soigneusement vos calculs, démontrer que :

$$I_{\alpha,\beta}(k) = \frac{1}{k^2}\left(\left(\alpha + 2\beta\pi\right)(-1)^k - \alpha\right)$$

2. Trouver la valeur de α et β pour que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ I_{\alpha,\beta}(k) = \frac{1}{k^2}$$

C - Étude de la fonction « sinus-cardinal »

Soit φ la fonction (appelée parfois sinus-cardinal) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Rappeler (sans démonstration) les développements limités en 0 de $\cos(t)$ à l'ordre 2 et de $\sin(t)$ à l'ordre 3.

2. Justifier la continuité de φ (en particulier en 0).

3. En étudiant le taux de variation de φ en 0, montrer que φ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\varphi'(0)$.

4. Calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$. En donner ensuite un développement limité à l'ordre 1 en 0.

5. Donner la limite de $\varphi'(t)$ quand t tend vers 0. En déduire que φ' est continue en 0.

6. Déduire de tout ce qui précède que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

7. Vérifier que φ ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire que la fonction $\psi = \dfrac{1}{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D - Un calcul de somme trigonométrique

1. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$ démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} z^k = z.\frac{1-z^n}{1-z}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,\pi]$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Indication : on pourra passer en complexe.

E - Conclusion

1. En utilisant les résultats des différentes questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)dt + \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$$

où la fonction f est définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(t) = \left(-1+\frac{t}{2\pi}\right)\psi\left(\frac{t}{2}\right)$$

2. Calculer la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^{\pi}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)dt$$

3. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité de la question **E.1** en déduire la valeur de :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

□ **Problème 2** - *Série harmonique et constante d'Euler*

Les sommes partielles de la série harmonique sont notées :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

A - Un équivalent de $\mathbf{H_n}$

1. Pour tout entier $k \geqslant 2$ montre que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$

2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\ln(n+1)+1-\ln(2) \leqslant H_n \leqslant \ln(n)+1$$

3. Justifier soigneusement l'équivalence suivante :

$$\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

4. Déduire de ce qui précède l'équivalence suivante :

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

B - Constante d'Euler

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $a_n = H_n - \ln(n)$ et pour tout entier $n \geqslant 2$ on pose $b_n = a_n - a_{n-1}$.

1. Déterminer un équivalent de b_n en $+\infty$.

2. Montrer que la série $\sum b_n$ est convergente.

3. En déduire que la suite (a_n) possède une limite finie γ, appelée *constante d'Euler*.

4. En revenant à l'inégalité de la question **A.2**, montrer que $\gamma \in]0,1]$.