

## Exercices classiques de calculs

## □ Exercice 1

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi]$  par  $f(t) = t^2$ .

1. Donner la représentation graphique de  $f$ .
2. Cette fonction est-elle continue? De classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux?
3. Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ .
4. Étudier la convergence de la série de Fourier de  $f$  et déterminer sa somme.
5. En prenant des valeurs particulières de  $t$ , déterminer la valeur des sommes de séries suivantes :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

6. En appliquant la formule de Parseval, calculer :

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

## □ Exercice 2

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(t) = \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|$ .

1. Vérifier que  $f$  est  $2\pi$ -périodique et donner sa représentation graphique.
2. Cette fonction est-elle continue? De classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux?
3. Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ .
4. Étudier la convergence de la série de Fourier de  $f$  et déterminer sa somme.
5. En prenant des valeurs particulières de  $t$ , déterminer la valeur des sommes de séries suivantes :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2 - 1)}$$

6. En appliquant la formule de Parseval, calculer :

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$$

## Quelques extraits de sujets de concours

## □ Exercice 3 - Filière ATS 2005 (extrait)

Soit  $h \in ]0, \pi[$  et  $f$  la fonction paire de période  $2\pi$  vérifiant :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{si } t \in [0, h] \\ 0 & \text{si } t \in ]h, \pi] \end{cases}$$

1. Donner l'allure du graphe de  $f$ .
2. Déterminer la série de Fourier de  $f$  et montrer qu'elle converge. On notera cette série :

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

3. Calculer  $f(0)$  et  $S(f)(0)$ . En déduire la valeur de :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nh)}{n}$$

4. Que vaut  $S(f)(h)$ ? En déduire la valeur de :

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2nh)}{n}$$

5. En prenant  $h = \frac{\pi}{2}$ , déduire de  $A$  la valeur de :

$$C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

6. Grâce à la formule de Parseval, trouver la valeur de :

$$D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2}$$

7. En prenant  $h = \frac{\pi}{2}$ , déduire de  $D$  la valeur de :

$$E = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad F = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$



□ **Exercice 4** - CCP TSI 2011 (Math 1, exercice 1)

Soit  $f$  l'unique fonction impaire admettant  $2\pi$  pour période et telle que :  $\forall t \in ]0, \pi[ , f(t) = 1$ .

1. Montrer que :  $f(0) = f(\pi) = 0$ , puis calculer  $f\left(\frac{13\pi}{4}\right)$  en justifiant la réponse fournie.

2. Représenter graphiquement la restriction de la fonction  $f$  à l'intervalle  $[-3\pi, 3\pi]$ .

3.

a. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$ .

b. En déduire :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}$ .

On énoncera très précisément le théorème utilisé.

c. En utilisant l'égalité établie à la question précédente 3.b., déterminer la somme de la

série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

d. Appliquer la formule de Parseval à la fonction  $f$  et en déduire la somme de la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

4. Soit  $x$  un réel strictement positif fixé.

a. Montrer que la fonction  $t \rightarrow e^{-xt} f(t)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

b. Soit  $k$  un entier naturel quelconque.

Montrer que :  $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xt} f(t) dt = \frac{(1 - e^{-\pi x})}{x} (-e^{-\pi x})^k$ .

c. En déduire :  $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = \frac{1}{x} \operatorname{th}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ .

*Remarque - Dans la question 4, on a calculé la transformée de Laplace de  $f$ .*

## Exercices plus théoriques

□ **Exercice 5**

1. Soit  $f$  une fonction continue et  $T$ -périodique ( $T > 0$ ) dont les coefficients de Fourier sont nuls. En utilisant la formule de Parseval montrer que  $f$  est nulle.

2. En déduire que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et  $T$ -périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier, alors  $f = g$ .

□ **Exercice 6**

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

On désigne par  $a'_n$  et  $b'_n$  les coefficients de Fourier de la fonction  $f'$  (qui est continue).

1. Calculer  $a'_0$ .

2. Exprimer les autres coefficients de Fourier de  $f'$  en fonction de ceux de  $f$ .

3. À l'aide de l'égalité de Parseval, démontrer l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^{2\pi} |f|^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2(t) dt$$

4. Quelles sont les fonctions pour lesquelles l'inégalité précédente est une égalité?