

## Première famille de développement

Le tout premier s'obtient en écrivant la somme des premiers termes d'une suite géométrique (le reste est d'ailleurs explicite). Il suffit ensuite de changer  $x$  en  $-x$  puis d'intégrer.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

## Fonctions exponentielle et hyperboliques

Pour la fonction exponentielle, la formule de Taylor-Young donne très facilement le résultat. En prenant les parties paires et impaires, on obtient ch et sh.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

## Fonctions trigonométriques

Les développements de cos et sin peuvent s'obtenir en prenant les parties réelle et imaginaire de celui de  $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ . Il n'y a pas de formule simple permettant de décrire le développement de la fonction tangente. Il faut connaître les premiers termes.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

## Fonctions puissances

Le développement de  $(1+x)^\alpha$  ressemble fortement à la formule du binôme (sauf que  $\alpha \in \mathbb{R}$  n'est pas nécessairement un entier naturel).

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} x^n + o(x^n)$$

## Autres développements

- Seuls les développements précédents sont explicitement au programme.
- Mais on peut très facilement obtenir ceux de Arctan, Argth, Arcsin et Argsh en intégrant le développement de leur dérivée (qu'il faut donc connaître).
- Pour Arccos, il suffit d'écrire  $\operatorname{Arccos} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}$ . Quant à Argch, elle n'est **pas** définie au voisinage de 0 (son ensemble de définition est  $[1, +\infty[$ ) : il n'est donc pas question de la développer en 0.

