Classe préparatoire TSI-2 Lycée Artaud 2011/2012	**Interrogation n° 8** 15 décembre 2011 - 30mn

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés.

NOM : .... **NOTE (sur 10) :** ....

Prénom : ....

Cours (sans démonstration)

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction continue par morceaux de $[a,b[$ dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Quand dit-on que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente ?

Réponse :

Lorsque la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F: & [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

possède une limite finie quand x tend vers b.

2. Soit α un nombre réel. À quelle condition sur α les intégrales suivantes sont-elles convergentes :

intégrale	condition
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$	$\alpha > 1$
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$	$\alpha < 1$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\,dt$	$\alpha < 0$

3. Compléter l'énoncé du théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives.

> Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[a,b[$ vérifiant :
>
> $$f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$$
>
> Alors on peut en déduire que :
>
> les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Exercice

En justifiant soigneusement votre démarche, déterminer la nature de l'intégrale impropre suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1+t^3\right)}$$

Solution :

a) **Introduction**

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\left(1+t^3\right)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

On écrit alors :

$$I = \underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(t)dt}_{I_2}$$

et on étudie séparément la convergence de I_1 et I_2.

b) **Pour I_1 (impropre en 0)**

Tout d'abord on remarque que :

$$f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

D'après le théorème d'équivalence (fonctions positives), I_1 est donc de même nature que :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt$$

Or cette dernière intégrale est une integrale de Riemann convergente $\left(\text{car } \alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$ donc I_1 est elle-même convergente.

c) **Pour I_2 (impropre en $+\infty$)**

Tout d'abord on remarque que :

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}.t^3} = \frac{1}{t^{\frac{7}{2}}}$$

D'après le théorème d'équivalence (fonctions positives), I_2 est donc de même nature que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{7}{2}}} dt$$

Or cette dernière intégrale est une integrale de Riemann convergente $\left(\text{car } \alpha = \frac{7}{2} > 1\right)$ donc I_2 est elle-même convergente.

d) **Conclusion**

Comme I_1 et I_2 convergent, l'intégrale I converge.