Chapitre K - Intégrales à paramètre

N-B Dans tout le chapitre I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, f est une fonction de $I \times J$ dans $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et on s'intéresse au problème de la définition (sur I), de la continuité, de la dérivabilité et du caractère $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) de la fonction F de la variable réelle donnée par :

$$F(x) = \int_J f(x,t)\,dt$$

I - Les grands théorèmes

I.1 - Théorème de continuité sous le signe intégral

Énoncé du théorème avec hypothèse de domination par une fonction positive intégrable indépendante du paramètre. Remarque : la condition de domination implique l'intégrabilité et donc l'existence de l'intégrale. Quand le théorème s'applique il est donc inutile d'étudier la convergence de l'intégrale en premier (mais on est obligé de le faire si l'intervalle I n'est pas précisé par l'énoncé).

Exemples :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \qquad G(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x^2+\sqrt{t}}\,dt$$

Quelques cas particuliers importants : si J est borné, une fonction dominante constante convient ; si I et J sont deux segments et f est continue sur $I \times J$ alors elle est bornée et toutes les hypothèses sont automatiquement satisfaites.

Exemple d'utilisation avec domination locale (sur tout segment) :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,dt$$

I.2 - Théorème de dérivation sous le signe intégral

Énoncé du théorème (ne pas oublier de démontrer l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur J, **qui n'est pas automatique**, et que l'hypothèse de domination concerne la dérivée partielle par rapport au paramètre x).

Exemple :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^4}\,dt$$

Exemple d'utilisation avec domination locale (sur tout segment) :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,dt$$

Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ (toutes les dérivées partielles sont supposées intégrables, seule la k^{e} doit être dominée).

II - Quelques exemples classiques (polycopié distribué aux élèves)

Le but de cette partie est d'illustrer les théorèmes et méthodes de la partie précédente. Rien de ce qui est fait ici n'est exigibles des élève.

II.1 - Transformée de Laplace

Sous réserve de convergence, la transformée de Laplace d'une fonction f continues par morceaux de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction $\mathscr{L}(f)$ de la variable complexe p définie par :

$$\mathscr{L}(f)(p) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

S'il existe $M \geqslant 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$$

alors $\mathscr{L}(f)(p)$ est absolument convergente pour tout complexe p vérifiant $\mathrm{Re}(p) > \alpha$.

Si on conserve l'hypothèse précédente et que l'on se limite à une variable réelle, alors $\mathscr{L}(f)$ est une fonction continue sur $]\alpha, +\infty[$.

Transformées de Laplace usuelles : échelon unité, fonction rampe, fonction exponentielle (avec exposant négatif)

II.2 - Fonction Γ d'Euler

Définition, existence sur $\mathbb{R}_+^*$, continuité sur $\mathbb{R}_+^*$, caractère $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, lien avec la factorielle lorsque x est un entier, calcul de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercices

Exercices de la feuille n° 12 (intégrales à paramètre).

Questions de cours exigibles des élèves

Aucune question de cours exigible cette semaine.

À venir

Séries entières.