

Concours divers – option TSI

Planche 1 Centrale, abordable dès la 1e année

Montrer qu'il existe dans $\mathbb{C}_2[X]$, trois polynômes uniques P_0, P_1, P_2 vérifiant $\forall (i, j) \in \{0, 1, 2\}^2, P_i(j) = \delta_{ij}$. Montrer que ces trois polynômes constituent une base de $\mathbb{C}_2[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque dans cette base.

Montrer que l'application f , qui, à un polynôme P de $\mathbb{C}_2[X]$, associe le reste de la division euclidienne de $(X^3 - 1)P$ par $X^3 - 3X^2 + 2X$, est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base précédente.

Planche 2 Centrale

Vérifier que $y(x) = x^\alpha$ est solution de $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$.

En déduire les solutions de $x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{1-x}$.

Trouver les solutions développables en série entière et préciser leur rayon de convergence R .

Soit $g(x) = x^2f(x)$ pour $|x| < R$; Calculer g' puis g et en déduire une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

Préciser les solutions sur $] -1, 1[$.

Planche 3 Centrale, I abordable dès la 1e année

I) Trouver le point équidistant de toutes les droites du plan données par $D_t : (1 - t^2)x + 2ty = 2 + 4t$. Faire une interprétation géométrique.

II) Soit la suite (u_n) donnée par :

$$u_1 = 2 \cos \theta, u_2 = 4 \cos^2 \theta, u_{n+2} = 2 \cos \theta u_{n+1} - u_n.$$

Montrer que $\forall n \geq 1, u_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ si $\sin \theta \neq 0$ et étudier le cas $\sin \theta = 0$.

$$\text{On note } D_n(x) \text{ le déterminant de } M(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Montrer que $D_{n+2}(x) = xD_{n+1}(x) - D_n(x)$.

Trouver $D_n(2)$ et $D_n(-2)$.

Trouver les valeurs propres de $M(2)$. Est-elle diagonalisable ?

Planche 4 Centrale

I) Maximum et minimum locaux de $f(x, y) = x^2 + 4x^3 - 2xy + 3y^2$.

II) Donner sous forme intégrale les solutions de $xy' - y = \sin x$. Donner la limite de y quand x tend vers 0.

Planche 5 Centrale, II abordable dès la 1e année

I) Trouver les coefficients de Fourier de $f(x) = |\sin x|$ et montrer la convergence de la série.

II) Résoudre $y'' + y = |\sin x|$ sur $] -\pi, \pi[$.

Indication : chercher une solution particulière de la forme $P(x) \cos x$ où P est un polynôme.

Planche 6 Centrale

Montrer que M réelle, carrée d'ordre n et vérifiant $M^2 + M + I_n = 0$ est inversible.

Déterminer les valeurs propres complexes possibles de M .

Soit $j = e^{2i\pi/3}$: montrer que $M - jI_n \in \text{Ker}(M - j^2I_n)$.

Montrer que $\mathbb{C}^n = \text{Ker}(M - j^2I_n) \oplus \text{Ker}(M - jI_n)$.

Montrer que M est diagonalisable.

Planche 7 Centrale

Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-xt} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

Montrer que f est continue et dérivable sur tout $[a, b]$ de \mathbb{R}_+^* .

Trouver une équation différentielle vérifiée par f , la résoudre et en déduire $f(1)$ avec Maple.

Planche 8 I abordable dès la 1e année

I) Le plan est rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; déterminer l'équation du plan P passant par $A(1, 0, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la distance d de $M(0, 1, 0)$ à P et la distance d' de M à P' d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$.

II) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est \mathcal{C}^1 et exprimer f' .

Montrer que f est solution de l'équation $2y' + xy = 0$.

Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $f(x)$.

Planche 9 II abordable dès la 1e année

I) Pour quelles valeurs de n , $f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$ est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la restriction de f et la diagonaliser.

II) Domaine de définition et domaine de dérivabilité de :

$f(x) = \text{Arc tan}(\text{sh } x) + \text{Arc cos}(\text{th } x)$.

Montrer que $(1 - \text{th}^2)^{1/2} = \frac{1}{\text{ch}}$ et en déduire que $f' = 0$.

Pour quelle valeur de x , $\text{th}(x) = \frac{5}{13}$?

En déduire que $\text{Arc tan} \frac{5}{12} + \text{Arc cos} \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.

Planche 10 CCP, abordable dès la 1e année

I) Nature de l'application f qui au point $M(x, y)$ associe $M_1(x_1, y_1)$ avec $x_1 = x$ et $y_1 = 4 - y$.

Soit g l'application qui à $M(x, y)$ associe $M_2(x_2, y_2)$ avec :

$$x_2 = \frac{2ay - x(1 - a^2) + 2}{1 + a^2} \text{ et } y_2 = \frac{2ax + y(1 - a^2) - 2a}{1 + a^2}.$$

On admet que $g \circ g = Id$. Donner la nature de g en fonction de a . Nature, suivant a de $g \circ f$.

II) Montrer que l'équation $\frac{2}{\pi} \text{Arc tan } x = \cos x$ admet une unique solution x_n dans $[2n\pi, (2n+1)\pi[$. Montrer que, en $+\infty$, $x_n \sim 2n\pi$. Trouver graphiquement la limite de (y_n) donnée par $y_n = x_n - 2n\pi$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $x = \text{Arc cos}(\cos x)$?

Montrer que $y_n = \text{Arc cos}(\frac{2}{\pi} \text{Arc tan } x_n)$.

Planche 11 I abordable dès la 1e année

I) Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre n , (a_{ij}) dont tous les coefficients valent 1 sauf les coefficients diagonaux qui valent $\cos \theta$ et $a_{12} = a_{21}$ qui sont nuls.

II) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge et la calculer.

Planche 12 CCP, I abordable dès la 1e année

I) Soit \vec{u} un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 euclidien ; vérifier que f , définie par $f(\vec{x}) = \frac{1}{2} (\vec{x} + (\vec{x}|\vec{u})\vec{u} + \sqrt{3}\vec{u} \wedge \vec{x})$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 . Justifier qu'on peut compléter \vec{u} en $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 . Donner la matrice de f dans B et reconnaître f .

Pour $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donner la matrice de f dans la base canonique.

II) Soit α un réel strictement supérieur à 1 et $n \geq 2$. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{2}{n^\alpha}$ converge.

Calculer $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$. Pour $n \geq 2$, calculer $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} \right)$ et

en déduire : $S_n = \sum_{k=2}^n u_k = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}$.

Donner un équivalent simple de $S - S_n$ quand n tend vers l'infini.

Indication : on pourra factoriser par $\frac{1}{n^\alpha}$.

Planche 13

I) Prouver la convergence de la série $\sum_{n \leq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière

$\sum_{n \leq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ pour $x \in]-R, R[$. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

II) Préciser les valeurs du réel a pour lesquelles la surface d'équation $ax^2 + ay^2 + az^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 1$ est un ellipsoïde.

Planche 14 I abordable dès la 1e année

I) Étudier et tracer la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = \frac{\sin^2(t)}{2 + \sin(t)} \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$

II) Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z \end{cases}$

Planche 15 II abordable dès la 1e année

I) Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = |\cos t|$, est paire et π -périodique. Donner la série de Fourier de f .

Après en avoir établi l'existence, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}.$$

II) Montrer que le polynôme $R = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans \mathbb{C} , notées a, b et c .

Montrer que $a, b, c, -a, -b$ et $-c$ sont six complexes distincts.

Indication : on montrera d'abord que $a \neq -a$ puis que $a \neq -b$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $Q(X^2) = P(X)P(-X)$.

En déduire un polynôme de degré 3 ayant pour racines a^2, b^2 et c^2 .

Planche 16

I) Rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$. Est-elle dérivable ? Si oui calculer sa dérivée. Est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 0]$? Sur $[0, 1]$?

Montrer que $g(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$ est constante.

II) On définit les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3}w_n \\ v_{n+1} = -3u_n + \frac{5}{3}v_n + \frac{5}{3}w_n \\ u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{7}{6}w_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$; $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

Calculer AC_1, AC_2, AC_3 , puis donner les propriétés de A .

Justifier l'existence de a, b, c réels tels que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$

puis montrer que $X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3$.