ECG-1

Chapitre

A

Cours et exercices

Pour bien commencer l'année

Le but de ce chapitre est de consolider certaines connaissances et capacités acquises au lycée. Aucune difficulté théorique ne sera développée ici et les résultats seront rappelés, le plus souvent, sans démonstration. Ce chapitre sera également l'occasion d'introduire un certain nombre de notations et un vocabulaire propres à l'écriture rigoureuse des mathématiques.

Sommaire

I – Calcul algébrique dans l'ensemble $\mathbb{R}$

La présentation est faite ici dans le cadre des nombres réels.

I.1 – Ensembles de nombres

I.1.1 – Notion d'ensemble

Rappelons pour commencer que si E est un ***ensemble***, la notation « $x \in \mathrm{E}$ » signifie que x est un ***élément*** de l'ensemble E. Par exemple la notation $x \in \mathbb{R}$ signifie que x est un élément de l'ensemble des nombres réels c'est à dire que x est un nombre réel.

Au contraire, la notation $x \notin \mathrm{E}$ signifie que x n'est pas un élément de E. Par exemple la notation $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ signifie que $\frac{1}{2}$ n'est pas un nombre entier.

Remarques

1 ▶ Nous ne définirons pas la notion d'ensemble. Il s'agit d'une ***notion première*** que nous nous contenterons d'utiliser conformément à notre intuition et à certain nombre de règles que nous rencontrerons au fur et à mesure de l'année.

2 ▶ Il y a plusieurs moyens pour décrire un ensemble (dans ce contexte, ***décrire un ensemble*** signifie être capable de dire quels sont précisément ses éléments).

Exemples

1 ▶ On peut décrire un ensemble ***en extension*** en donnant la liste de ses éléments :

$$\mathrm{E} = \left\{a, b, c, d\right\} \qquad \mathrm{F} = \left\{1, 2, 3\right\}$$

2 ▶ On peut décrire un ensemble ***en compréhension*** en donnant une propriété qui ***caractérise*** ses éléments. L'ensemble des réels ***dont le carré vaut*** 4 se note par exemple :

$$\left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4\right\}$$

$\big($bien entendu cet ensemble n'est rien d'autre que la ***paire*** $\{-2, 2\}\big)$.

3 ▶ On peut décrire un ensemble comme l'ensemble des images par une fonction. Par exemple :

$$\left\{k^2,\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

désigne l'ensemble des ***carrés parfaits*** c'est à dire l'image des entiers naturels par la fonction ***élévation au carré*** c'est-à-dire $x \longmapsto x^2$.

I.1.2 – Entiers

Les entiers ***naturels*** sont les entiers positifs ou nuls. L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{N}$. Les entiers de signes quelconques sont appelés entiers ***relatifs*** et on note $\mathbb{Z}$ l'ensemble de ces nombres. L'ensemble $\mathbb{N}$ est donc ***inclus*** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On note également $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels ***non nuls*** et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs ***non nuls***. Par ailleurs, la notation $[\![n, p]\!]$ désignent l'ensemble des entiers qui sont supérieurs ou égaux à n et inférieurs ou égaux à p. Par exemple $[\![-2, 5]\!]$ est constitué des entiers $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

L'ensemble des entiers est souvent étudié sous l'angle de l'***arithmétique***, une sous-discipline des mathématiques qui remonte à l'antiquité. Il y est question de diviseurs, de nombres premiers et de bien d'autre choses qui ne sont pas au programme en filière ECG. Nous en parlerons un tout petit peu, plus loin dans ce chapitre.

I.1.3 – Nombre rationnels

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres ***rationnels*** est l'ensemble des fractions d'entiers. Autrement dit :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

La notation $\mathbb{Q}^*$ désigne bien sûr l'ensemble des nombres rationnels non nuls.

Tout rationnel s'écrit de manière ***unique*** sous la forme $\dfrac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et a et b n'ayant aucun diviseur commun (autre que 1). On dit alors que la fraction est ***irréductible*** et c'est toujours sous cette forme qu'il est préférable de donner les résultats rationnels.

Il existe des réels non rationnels, on dit qu'ils sont ***irrationnels***. Par exemple $\sqrt{2}$, π et $\mathrm{e} = \exp(1)$ sont des nombres irrationnels.

I.1.4 – Théorème

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration

B1

Remarque – Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé le fait que si a est un nombre entier dont le carré est pair, alors a est lui même pair. Justifions cela.

Démonstration

B2

I.1.5 – Nombres décimaux

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres ***décimaux*** est l'ensemble des fractions d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 10. Autrement dit :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

De manière équivalente un nombre réel est décimal si et seulement si son écriture décimale ne comporte qu'un nombre fini de chiffres après la virgule (cette caractérisation est admise).

Prenons par exemple $x = 5,283$. Avec cette notation, 5 est le chiffre des unités, 2 est le chiffre des dixièmes, 8 celui des centièmes, 3 celui des millièmes et on a :

$$x = 5 + 2 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} = 5 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000}.$$

En réduisant au même dénominateur on a donc :

$$x = \frac{5283}{1000} = \frac{5283}{10^3}$$

ce qui prouve que x est bien un nombre décimal.

Il existe des nombres réels non décimaux. Par exemple $\frac{1}{3}$.

I.1.6 – Proposition

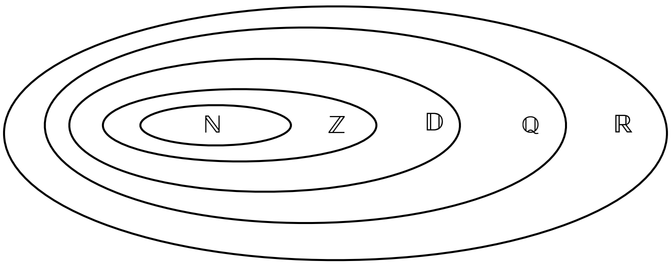
La nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Démonstration

B3

I.1.7 – Lien entre les différents ensembles de nombres

On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



I.1.8 – Autres notations

Il existe, pour certains intervalles de $\mathbb{R}$, des notations spécifiques que nous donnons ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_+ &= [0, +\infty[&&= \{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\} \\
\mathbb{R}_+^* &=]0, +\infty[&&= \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} \\
\mathbb{R}_- &=]-\infty, 0] &&= \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant 0\} \\
\mathbb{R}_-^* &=]-\infty, 0[&&= \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}
\end{aligned}$$

Des notations analogues peuvent être utilisées pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

I.2 – Un peu de logique et de langage mathématique

I.2.1 – Proposition mathématique

Dans ce qui suit, le terme ***proposition*** désigne un énoncé (en général mathématique) auquel on attribue (très souvent mais pas toujours) une valeur de vérité. Pour écrire une telle proposition nous aurons besoins des ***quantificateurs*** ($\forall$, $\exists$) et des ***connecteurs logiques*** (ET, OU, NON, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$).

I.2.2 – Définition (Quantificateurs)

(i) Pour indiquer qu'un énoncé (ou proposition) mathématiques est vrai ***quel que soit*** l'élément x dans l'ensemble E on écrit : « $\forall x \in \mathrm{E}$ ». Le symbole $\forall$ est appelé ***quantificateur universel***.

(ii) Pour indiquer qu'un énoncé (ou proposition) mathématiques est vrai ***pour au moins*** un élément x dans l'ensemble E on écrit : « $\exists x \in \mathrm{E}$ ». Le symbole $\exists$ est appelé ***quantificateur existentiel***.

(iii) Pour indiquer qu'un énoncé (ou proposition) mathématiques est vrai ***pour un unique*** élément x dans l'ensemble E on écrit : « $\exists! x \in \mathrm{E}$ ».

I.2.3 – Autres notations

On utilise indifféremment les symboles « | », « / » ou une simple virgule « , » pour signifier « tel que » dans une phrase mathématiques.

ATTENTION

Le langage mathématique est un langage à part entière et il convient, en principe, de ne pas le mélanger avec le langage naturel (le français pour nous). Normalement, une phrase mathématique s'écrit de manière isolée sur une ligne (mais on peu parfois faire preuve d'un peu de souplesse).

Exemples

1 ▶ L'énoncé mathématique suivant : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > x$ » signifie « pour tout nombre réel x, il existe un entier naturel n tel que n soit strictement plus grand que x ». Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

B4

2 ▶ Écrivons en langage mathématiques le fait qu'il n'existe aucun réel dont le carré soit égal à -1. Attention le symbole $\nexists$ n'est pas véritablement considéré comme un quantificateur et on ferra en sorte de ne pas l'utiliser.

B5

Exercice A1

Traduire en langage naturel les énoncés mathématiques suivant puis préciser s'ils sont vrais ou faux :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R}_+,\ x = y^2$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ 3x^2 + 1 = x^2 + x$

Exercice A2

Traduire en langage mathématiques les énoncés suivant (vrais ou faux est bien moins évident pour ***(ii)***) :

1. La suite de terme général $u_n = n^2$ est bornée.
2. Tout entier naturel peut s'écrire comme la somme de quatre carrés d'entiers naturels.

Exercice A3 (python)

Écrire une fonction Python `quatre_carres(n)` prenant en argument un entier naturel n et renvoyant quatre entiers a, b, c et d tels que $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ (par exemple dans une liste).
Indication – *On pourra imbriquer quatre boucles* `for` *et provoquer une sortie anticipée grâce à un* `return`.

Remarque – On pourra alléger le dernier énoncé mathématique de l'exercice précédent en utilisant la notion de ***produit cartésien*** de plusieurs ensembles :

▶ Si E et F sont deux ensembles, le ***produit cartésien*** de E et F, noté $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, est l'ensemble des ***couples*** de la forme (x, y) avec $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$.

- Si E = F on notera E^2 au lieu de $E \times E$. Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. Il est donc équivalent d'écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
ou bien : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ et $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- Ce que l'on vient d'évoquer pour des couples fonctionne de même avec des triplets, quadruplets ou n-uplets.

I.2.4 – Définition (Connecteurs logiques élémentaires)

Étant donné un ensemble de propositions, nous disposons sur celui-ci des opérateurs logiques usuels :
- l'opérateur binaire ET (appelé aussi conjonction) ;
- l'opérateur binaire OU (appelé aussi disjonction non exclusive) ;
- l'opérateur unaire NON ;

dont la ***sémantique*** est définie par les tables de vérité suivantes :

A	B	A ET B
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

A	B	A OU B
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

A	$\overline{A}$
1	
0	

Remarques

1 ▸ Il est très fréquent de noter $\overline{A}$ la négation de A, au lieu de (NON A). Nous utiliserons cette notation.

2 ▸ Les logiciens notent $\wedge$ à la place de ET et $\vee$ à la place de OU. Nous n'utiliserons ***pas*** ces notations.

3 ▸ On appellera proposition ***composée*** une proposition obtenue à partir de propositions élémentaires (parfois appelées ***atomes***), à l'aide des opérateurs définis précédemment. Par exemple :

$$P = A \text{ ET } \left(B \text{ OU } \overline{C}\right)$$

4 ▸ On dira que deux propositions composées sont ***logiquement équivalentes*** si elles ont la même table de vérité. Autrement dit si elles ont la même valeur de vérité quel que soit le ***contexte***. On écrit alors $P \longleftrightarrow Q$.

Exercice A4 (Distributivité)

Soient A, B et C trois propositions quelconques. Démontrer, à l'aide de tables de vérité, que :

1. (A OU B) ET C est logiquement équivalente à (A ET C) OU (B ET C) (on notera (A OU B) ET C $\longleftrightarrow$ (A ET C) OU (B ET C)).

2. (A ET B) OU C est logiquement équivalente à (A OU C) ET (A OU C) (on notera (A ET B) OU C $\longleftrightarrow$ (A OU C) ET (B OU C)).

Exercice A5 (Loi de Morgan)

Soient A et B deux propositions quelconques. Démontrer, à l'aide de tables de vérité, que :

1. $\overline{A \text{ ET } B}$ est logiquement équivalente à $\overline{A}$ OU $\overline{B}$ (on notera $\overline{A \text{ ET } B} \longleftrightarrow \overline{A} \text{ OU } \overline{B}$).

2. $\overline{A \text{ OU } B}$ est logiquement équivalente à $\overline{A}$ ET $\overline{B}$. (on notera $\overline{A \text{ OU } B} \longleftrightarrow \overline{A} \text{ ET } \overline{B}$).

I.2.5 – Définition (Implication)

Étant donné deux propositions A et B l'***implication*** $A \Longrightarrow B$ (qui se lit A ***implique*** B) est une abréviation de la proposition $\overline{A}$ OU B.
Afin de mieux comprendre cette notion, voici la table de vérité de ce ***nouveau connecteur logique*** :

A	B	$\overline{A}$	$A \Longrightarrow B$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Remarques

1 ▶ En lisant la table de vérité, on retiendra que la proposition $\text{A} \Longrightarrow \text{B}$ est fausse dans le seul cas où A est vraie et B est fausse.

2 ▶ Au lieu de « A ***implique*** B », on pourra aussi utiliser le vocabulaire suivant :
- B ***est impliqué par*** A ;
- ***si*** A ***alors*** B (ou si A est vraie alors B est vraie) ;
- B est une ***condition nécessaire*** pour avoir A ;
- A est une ***condition suffisante*** pour avoir B.

3 ▶ Notons que la $\boxed{\text{négation de A} \Longrightarrow \text{B}}$ $\big($abréviation de $\overline{\text{A}}$ OU B$\big)$ est équivalente à :

$$\overline{\text{A} \Longrightarrow \text{B}} \;=\; \overline{\overline{\text{A}} \text{ OU } \text{B}} \longleftrightarrow \overline{\overline{\text{A}}} \text{ ET } \overline{\text{B}} \longleftrightarrow \boxed{\text{A ET } \overline{\text{B}}}$$

Exemples

1 ▶ Si $n \in \mathbb{N}$ alors l'implication suivante est vraie : « n est divisible par 4 » $\Longrightarrow$ « n est divisible par 2 »

2 ▶ La négation de l'implication précédente est : « n est divisible par 4 » ET « n n'est pas divisible par 2 »
Bien entendu, ce second énoncé est faux (quel que soit l'entier n).

Exercice A6 (Modus ponens)

Démontrer, à l'aide d'une table de vérité, que la proposition composée $\big(\text{A ET } (\text{A} \Longrightarrow \text{B})\big) \Longrightarrow \text{B}$ est toujours vraie (on dit qu'il s'agit d'une ***tautologie***).

I.2.6 – Définition (Réciproque d'une implication)

La ***réciproque*** d'une implication $\text{A} \Longrightarrow \text{B}$ est l'implication $\text{B} \Longrightarrow \text{A}$.

Afin de mieux comprendre cette notion, dressons la table de vérité de la ***réciproque***.
Il est essentiel de comprendre qu'il n'y a ***aucun lien logique entre une implication et sa réciproque***. Autrement dit elles sont vraies ou fausses, indépendamment l'une de l'autre. Et cela se comprend justement en lisant la table de vérité.

A	B	$\text{A} \Longrightarrow \text{B}$	$\text{B} \Longrightarrow \text{A}$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Exemple – Si $n \in \mathbb{N}$, la réciproque de : « n est divisible par 4 » $\Longrightarrow$ « n est divisible par 2 »
est l'implication : « n est divisible par 2 » $\Longrightarrow$ « n est divisible par 4 »
La première de ces implications est bien sûr vraie et la deuxième est fausse.

I.2.7 – Définition (Équivalence de deux propositions)

Étant donné deux propositions A et B l'***équivalence*** $\text{A} \Longleftrightarrow \text{B}$ (qui se lit A ***équivaut*** à B) est une abréviation de la proposition $(\text{A} \Longrightarrow \text{B})$ ET $(\text{B} \Longrightarrow \text{A})$.

I.2.8 – Table de vérité de l'équivalence

Afin de mieux comprendre cette notion, dressons la table de vérité de ce nouveau ***connecteur logique***. On constate (et cela est cohérent avec l'usage courant) que $\text{A} \Longleftrightarrow \text{B}$ est vraie lorsque A et B sont simultanément vraies ou simultanément fausses (et seulement dans ce cas).

A	B	$\text{A} \Longrightarrow \text{B}$	$\text{B} \Longrightarrow \text{A}$	$\text{A} \Longleftrightarrow \text{B}$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Remarques

1 ▶ L'équivalence $\text{A} \Longleftrightarrow \text{B}$ est la conjonction de l'implication $(\text{A} \Longrightarrow \text{B})$ et de sa réciproque $(\text{B} \Longrightarrow \text{A})$.

2 ▶ Dans la définition de l'équivalence $\text{A} \Longleftrightarrow \text{B}$ il est clair que A et B ont un rôle symétrique. Autrement dit, les énoncés $\text{A} \Longleftrightarrow \text{B}$ et $\text{B} \Longleftrightarrow \text{A}$ sont équivalents. **Ouf!**

3 ▶ Au lieu de « A ***équivaut*** à B », on pourra aussi utiliser le vocabulaire suivant :
- A est ***équivalente*** à B ;
- A ***si et seulement si*** B (ou A est vraie si et seulement si B est vraie) ;
- A est une ***condition nécessaire et suffisante*** pour avoir B.

Exemple – Si $n \in \mathbb{N}$ cette équivalence est vraie : « n est divisible par 2 et par 5 » $\Longleftrightarrow$ « n est divisible par 10 »

I.2.9 – Théorème

Soient P et Q deux propositions (composées) telles que $\mathrm{P} \longleftrightarrow \mathrm{Q}$. Alors la proposition $\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$ est une tautologie.

I.2.10 – Définition (Contraposée d'une implication)

La ***contraposée*** d'une implication $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$ est l'implication $\overline{\mathrm{B}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{A}}$.

I.2.11 – Théorème

Une implication $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$ et sa contraposée $\overline{\mathrm{B}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{A}}$ sont logiquement équivalente.

Démonstration

Utilisons une table de vérité.

B6

Exemple – Si $n \in \mathbb{N}$, considérons l'implication suivante : « n^2 est pair » $\Longrightarrow$ « n est pair »
Sa contraposée est l'implication : « n est impair » $\Longrightarrow$ « n^2 est impair »
Nous avons déjà vu (lors de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$) que ces propositions sont vraies (pour tout entier n).

I.2.12 – Négation et quantificateurs

Un grand nombre d'énoncés mathématiques se présentent sous l'une des formes suivantes :

$$\mathrm{A} = \text{« } \forall x \in \mathrm{E},\ \mathscr{P}(x) \text{ »}$$
$$\mathrm{B} = \text{« } \exists x \in \mathrm{E},\ \mathscr{P}(x) \text{ »}$$

où E est un ensemble et $\mathscr{P}$ est une proposition (on dit aussi ***prédicat***) dépendant de x.

On rappelle que la signification d'un tel énoncé est la suivante :

A = « La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout x appartenant à E. »

B = « Il existe (au moins) un élément x de E ayant la propriété $\mathscr{P}$. »

La négation d'un tel énoncé s'obtient en remplaçant $\forall$ par $\exists$, $\exists$ par $\forall$ et en niant le prédicat final (celui-ci pouvant être composé bien sûr) :

$$\overline{\mathrm{A}} = \text{« } \exists x \in \mathrm{E},\ \overline{\mathscr{P}(x)} \text{ »}$$
$$\overline{\mathrm{B}} = \text{« } \forall x \in \mathrm{E},\ \overline{\mathscr{P}(x)} \text{ »}$$

Exemples

1 ▶ Considérons l'énoncé (vrai) suivant : $\mathrm{A} = \text{« } \exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 4 \text{ »}$.
Sa négation (fausse) est l'énoncé suivant : $\overline{\mathrm{A}} = \text{« } \forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \neq 4 \text{ »}$

2 ▶ Considérons l'énoncé (vrai) suivant : $\mathrm{B} = \text{« } \forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2 \text{ »}$
Sa négation (fausse) est l'énoncé suivant : $\overline{\mathrm{B}} = \text{« } \exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2 \text{ »}$

I.3 – Règles de calcul élémentaires

I.3.1 – Proposition (Calcul fractionnaire)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}^*$ on a :

(i) $\dfrac{0}{a} = 0$, $\dfrac{a}{1} = a$, $\dfrac{a}{-1} = -a$

(ii) $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$

(iii) $\dfrac{a}{b} = a\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b}a$

(iv) $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$ (si $a \neq 0$)

(v) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k \times a}{k \times b}$

(vi) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

Exercice A7

Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} \qquad B = \frac{\frac{2}{3}}{6}$$

$$C = 3 \times \frac{7}{18} \qquad D = \frac{4+17}{11+4}$$

Exercice A8

Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{4}{3} \times \left(\frac{13}{4} - \frac{12}{6}\right) \qquad B = \frac{4}{3} - 1$$

$$C = \frac{\frac{1}{3} + 2}{\frac{5}{6} - 1} \qquad D = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{8}}$$

I.3.2 – Définition (Puissances d'exposant entier)

(i) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

(ii) Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n = 0$, on pose : $a^0 = 1$

(iii) Pour $a = 0$ et $n = 0$, on pose : $0^0 = 1$

(iv) Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Remarques

1 ▶ Attention, la convention $0^0 = 1$ fait débat. Pour être prudent ajoutons qu'il s'agit ici de « exactement 0 » à la puissance « exactement 0 ». Cette convention est utile pour faire du calcul algébrique. Mais, en analyse, lorsque que l'on travaille avec des limites, « 0^0 » devient une ***forme indéterminée***.

2 ▶ Il est bon (et amusant ?) de connaître les premières puissances de 2 (que l'on rencontre souvent en informatique) : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

3 ▶ On remarque que $2^{10} = 1024$ est proche de $10^3 = 1000$. Cette proximité est à l'origine de malentendus, par exemple concernant les tailles des disques durs. Combien de Go contient un disque de 1 To ? Pour certains 1024, pour d'autres 1000.

I.3.3 – Proposition (Calculs avec des puissances)

Soient $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$ et $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$.

(i) Puissances différentes, même base :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad \left(a^n\right)^p = a^{np}$$

(ii) Puissance identique, bases différentes :

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exercice A9

Simplifier les expressions suivantes :

$$\mathrm{A} = \frac{5^4 \times 3^{-1} \times 2^3}{15^3} \qquad \mathrm{B} = \frac{21 \times 10^{-3}}{3 \times 10^2}$$

Exercice A10

Simplifier les expressions suivantes :

$$\mathrm{A} = \frac{4 \times 10^{12} \times 9 \times 10^{-5}}{1{,}2 \times 10^2} \qquad \mathrm{B} = \frac{4 \times 7^2 - 2^5 \times 3}{4^4 - 4^3}$$

$$\mathrm{C} = \frac{3^2 \times 27}{81^2} \qquad \mathrm{D} = 4 \times \left(2^2 - 2^4\right)^2 - 64$$

I.4 – Racine carrée et valeur absolue

I.4.1 – Théorème et Définition (Racine carrée)

Pour tout réel positif a, il existe un unique réel positif dont le carré vaut a. Ce nombre est appelé ***racine carrée*** de a et est noté $\sqrt{a}$.

Exemple – On a : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{100} = 10$ et $\sqrt{121} = 11$.

Remarque – En langage mathématique, la propriété précédente s'écrit :

B7

I.4.2 – Définition (Valeur absolue)

On appelle ***valeur absolue*** de tout nombre réel a, la nombre réel positif suivant :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple – On a $|23| = 23$ et $|-4| = 4$.

I.4.3 – Proposition (Propriété de la racine carrée)

(i) Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^2$, on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

(ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

(iii) Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^2$, on a : $a \leqslant b \Longrightarrow \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ on a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

(v) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exercice A11

Simplifier les nombres suivants (on ne conservera pas de racine au dénominateur) :

$$A = \sqrt{8} \qquad B = \sqrt{48} \qquad C = \sqrt{\frac{9}{32}}$$

Exercice A12

1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible.

$$A = \sqrt{54} - 3\sqrt{96} - 5\sqrt{24} \qquad B = \sqrt{160} \times \sqrt{40} \times \sqrt{90}$$

2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers.

$$C = \left(3\sqrt{10} - 5\sqrt{3}\right)^2 \qquad D = \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{6}\right)^2$$

3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier.

$$E = \left(3 - 2\sqrt{5}\right)\left(3 + 2\sqrt{5}\right) \qquad F = \frac{24\sqrt{45}}{9\sqrt{80}}$$

I.4.4 – Proposition (Propriété de la valeur absolue)

(i) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $|a| = 0 \iff a = 0$

(ii) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a : $|a| = |b| \iff a = \pm b$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $a \leqslant |a|$

(iv) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a : $|a \times b| = |a| \times |b|$.

(v) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ on a : $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

(vi) **Inégalité triangulaire –** Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Remarques

1 ▶ Pour l'inégalité triangulaire, il y a parfois égalité $\left(\text{par exemple } |4+3| = |7| = 7 = 4+3 = |4|+|3|\right)$ et parfois l'inégalité est stricte $\left(\text{par exemple } |(-5)+3| = |-2| = 2 < |-5| + |3| = 5+3 = 8\right)$.

2 ▶ Le nombre positif $|b-a|$ représente la ***distance*** entre a et b sur la droite réelle.

Démonstration de l'inégalité triangulaire

B8

I.5 – Développement et factorisation

I.5.1 – Proposition (Commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$)

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sont ***commutatives*** ce qui signifie que le résultat de ces deux opérations ne dépend pas de l'ordre des deux éléments. En langage mathématique cela s'écrit :

(i) Pour l'addition :

B9

(ii) Pour la multiplication :

B10

I.5.2 – Proposition (Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$)

La ***distributivité*** de la multiplication par rapport à l'addition est en quelque sorte une règle de compatibilité entre ces deux opérations.

(i) Distributivité à gauche :

B11

(ii) Distributivité à droite :

B12

On en déduit facilement que :

B13

Remarque – Utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet de ***développer*** une expression, c'est-à-dire transformer un produit en somme.

I.5.3 – Factorisation

Factoriser consiste au contraire à transformer une somme en un produit. Cela est en général plus difficile car il faut pouvoir reconnaitre des particularités dans l'expression sur laquelle on travaille. Pour l'instant nous nous contenterons de factoriser à l'aide d'***identités remarquables***.

I.5.4 – Proposition (Identités remarquables au carré et au cube)

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \quad (\star)$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

Démonstration de l'identité $(\star)$

B14

Remarque – Attention, $a^2 + b^2$ ne peut pas se factoriser dans $\mathbb{R}$.

Exercice A13

Soit x un nombre réel quelconque.

1. Développer $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(1-x)^2$ et $(1-x)^3$.

2. Factoriser $4-x^2$ et $8+x^3$

I.6 – Un zeste d'arithmétique dans $\mathbb{N}$

La première notion à connaître en arithmétique est la relation de ***divisibilité***.

I.6.1 – Définition

Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^2$. On dit que b divise a, et on écrit $b|a$ s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a=kb$.

Un des points fondamentaux de l'arithmétique des entiers (naturels ou relatifs) est l'existence d'une ***division euclidienne***. Voici précisément le théorème (que nous admettrons).

I.6.2 – Théorème (Division euclidienne dans $\mathbb{N}$)

Pour tout $a\in\mathbb{N}$ et tout $b\in\mathbb{N}^*$ il existe deux entiers naturels q et r ***uniques*** vérifiant :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ \quad\text{ET} \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}.$$

On dit que a est le ***dividende***, b le ***diviseur***, q le ***quotient*** et r le ***reste*** de la division. Au dela de cette formulation théorique il convient de savoir poser une division ***en pratique***.
Divisons, par exemple, 3589 par 23 :

B15

Remarque – En conservant les notations du résultat précédent, on peut affirmer que b divise a si et seulement si $r=0$ (cas où la division « tombe juste »).

Exercice A14

Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de a par b et préciser si l'entier b divise ou pas l'entier a :

1. $a=15341$ et $b=16$ **2.** $a=22368$ et $b=24$ **3.** $a=24909$ et $b=57$ **4.** $a=19636$ et $b=35$

I.6.3 – Définition (Nombre premier)

Un entier $p\in\mathbb{N}$ est dit ***premier*** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même (sous-entendu 1 et p sont différents).

Remarques

1 ▶ L'entier 1 n'est **PAS** premier (car il ne possède qu'un seul diviseur).

2 ▶ Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 sont les nombres suivants :

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97$$

Exercice A15 (python)

Écrire une fonction Python `est_premier(n)` prenant en argument un entier naturel n et renvoyant `True` ou `False` suivant que n est premier ou pas.

Indications :

- *On pourra parcourir tous les entiers entre* 2 *et* $n-1$ *et tester la présence d'éventuels diviseurs.*
- *On pourra ensuite optimiser cette fonction en testant seulement les entiers entre* 2 *et* $\sqrt{n}$.

I.6.4 – Lemme

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel et d le plus petit diviseur de n appartenant à $[\![2, n]\!]$. Alors d est premier.

I.6.5 – Théorème (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout entier naturel non nul peut s'écrire comme un produit de nombres premiers de manière unique, à l'ordre près des facteurs. Si on exclut 1 (qui est le « produit vide ») ce résultat signifie que pour tout entier $n \geqslant 2$ il existe des nombres premiers $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ et des entiers naturels non nuls α_1, α_2, ..., α_r tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$$

Cette dernière écriture est unique (car on a ordonné les facteurs premiers).

Exercice A16

Démontrer l'existence de la décomposition en facteurs premiers en raisonnant par récurrence forte *(unicité admise)*.

Exercice A17 (python)

1. Écrire une fonction Python `plus_petit_diviseur(n)` prenant en argument un entier naturel $n \geqslant 2$ et renvoyant le plus petit diviseur de n appartenant à $[\![2, n]\!]$.
2. Écrire une fonction Python `valuation(p, n)` prenant en argument un nombre premier p et un entier n et qui renvoie le plus grand entier k tel que p^k divise n.
3. À l'aide d'une boucle `while` et des deux fonctions précédentes, écrire une fonction Python `decomposition(n)` qui renvoie la décomposition de n en facteurs premiers sous la forme d'une liste $[(p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2), \ldots, (p_r, \alpha_r)]$.

II – Équations dans $\mathbb{R}$

II.1 – Équations polynomiales

II.1.1 – Équations de degré 2

On considère une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, l'inconnue x étant réelle. Pour résoudre l'idée est de factoriser cette expression à l'aide d'une identité remarquable :

B16

Si l'on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (appelé ***discriminant*** de l'équation) on a donc :

B17

(a) ***Si*** Δ ***est positif*** alors il admet une racine carrée, on a $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ et donc :

B18

B19

Pour conclure on utilise une propriété essentielle de l'ensemble de $\mathbb{R}$: l'***intégrité***. Cette propriété peut s'énoncer de la manière suivante :

B20

En utilisant la notation $\Longleftrightarrow$ (équivalence logique) on a donc :

B21

Les solutions de l'équation sont donc les deux nombres :

B22

(b) Dans le cas particulier où $\Delta = 0$ l'équation se résume à :

B23

On a alors une solution « ***double*** » qui est le nombre :

B24

(c) Si Δ ***est strictement négatif***, on a alors :

B25

Cette expression ne s'annule donc pour aucune valeur du nombre réel de x ce qui signifie que l'équation n'a ***aucune solution réelle***.

II.1.2 – Relation entre coefficients et racines d'une équation polynomiale de degré 2

Supposons que l'on dispose d'une fonction polynomiale de degré 2 dont on connait les racines et que l'on sait donc écrire de manière factorisée et développée :

$$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

En développant l'expression factorisée on obtient :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2$$

Un théorème que nous verrons plus tard (principe d'identification) affirme que si deux expressions polynomiales sont égales, alors elles ont les mêmes coefficients, degré par degré. D'où, après petit calcul :

$$\boxed{r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad r_1r_2 = \frac{c}{a}}$$

II.1.3 – Proposition (Factorisation polynomiale à l'aide d'une racine)

Si a est une racine de la fonction polynomiale P alors l'expression $\mathrm{P}(x)$ peut se factoriser par $(x-a)$.

Remarque – Cette proposition montre bien, pour une expression polynomiale, le lien entre factorisation d'une part et recherche des racines d'autre part.

Méthode A.1

Avant de résoudre une équation, on commence **TOUJOURS** par étudier l'ensemble de résolution c'est-à-dire le plus grand ensemble sur lequel les différentes expression de l'équations sont bien définies. En fin de résolution, il apparait parfois des « fausses solutions » qui n'appartiennent pas à l'ensemble de résolution et qu'il faut donc éliminer.

Méthode A.2

Il n'y a pas de méthode systématique pour factoriser une expression. On peut néanmoins retenir les méthodes suivantes (voir ci-après pour les détails) :

- Utiliser une ***identité remarquable***.
- Dans le cas d'une expression polynomiale, essayer de trouver une ***racine évidente*** puis procéder à une ***division euclidienne polynomiale***.
- Utiliser les formules classiques avec ***discriminant*** dans le cas spécifique d'une expression polynomiale de degré 2.
- Utiliser un ***changement de variable*** (notamment pour les équations ***bicarrés***).

Exercice A18

Factoriser dans $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes et en donner les racines réelles (s'il y en a).

1. $\mathrm{A}(x) = x^4 + 3x^2 + 2$

2. $\mathrm{B}(x) = x^4 + x^2 + 1$

3. $\mathrm{C}(x) = x^3 + x^2 + x - 3$

4. $\mathrm{D}(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$

II.2 – Équations contenant des valeurs absolues

Méthode A.3

Pour résoudre une équation contenant une ou plusieurs valeurs absolues on peut procéder par ***disjonction de cas***, en fonction du signe des expressions figurant dans les valeurs absolues.

Exercice A19

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+1| = x^2$.

Exercice A20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x+5 = \left|3x-1\right|$

2. $x+1 = \left|2x+5\right|$

3. $4x-3 = |4x-3|$

4. $|3x+4| = |5x-2|$

II.3 – Équations contenant des racines carrées

Le principe général est qu'il faut ***absolument*** s'occuper des questions de ***signes***.

Méthode A.4

Pour résoudre une équation comportant une (ou plusieurs) racine carrée :

- on commence par s'occuper des questions d'ensemble de résolution ;
- on peut précéder par élévation au carré, ***ce qui peut introduire des « fausses solutions »*** puis effectuer une vérification ;
- on peut procéder par équivalences successives à condition de s'occuper à chaque étape des questions de signes ;
- on peut isoler une racine d'un coté de l'équation afin de l'élever au carré (en faisant toujours attention aux signes).

Exercice A21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{x\sqrt{x-2}}{x-3} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

2. $\sqrt{\left|x^2-1\right|} = x-5$

Exercice A22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4} = \sqrt{5}$.

Exercice A23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x+1 = \sqrt{-x^2+5}$.

III – Inégalités et inéquations dans $\mathbb{R}$

III.1 – Propriété de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

III.1.1 – Généralités

On rappelle que la notation $a \leqslant b$ signifie que le nombre réel a est inférieur ou égal au réel b. La notaion $a < b$ signifie que le nombre réel a est strictement inférieur au réel b. On dispose également des relations « supérieur ou égal » et « strictement supérieur ».

Cette ***relation d'ordre*** $\leqslant$ possède les propriétés suivantes.

a) Réflexivité
Pour tous réels a on a $a \leqslant a$. Par exemple l'énoncé mathématiques $2 \leqslant 2$ est exact. Le nombre 2 est en effet ***inférieur ou égal*** à 2 puisque qu'il est ***égal*** à 2.

b) Transitivité
Pour tous réels a, b, c, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$

c) Antisymétrie
Pour tous réels a et b, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ alors $a = b$.

Remarques

1 ▶ En langage mathématique, la réflexivité s'écrit :

B26

2 ▶ La transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ peut donc s'écrire

B27

et l'antisymétrie :

B28

III.1.2 – Compatibilité avec l'addition

Si $a \leqslant b$ alors pour tout nombre réel c on a $a+c \leqslant b+c$, autrement dit :

B29

On en déduit que l'on peut ajouter deux inégalités : si $a \leqslant b$ et $x \leqslant y$ alors $a+x \leqslant b+y$. En langage mathématique cela s'écrit :

B30

En revanche ***on ne peut pas soustraire deux inégalités***. On a par exemple :

B31

Plus généralement si l'on dispose de nombre réels $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ tels que :

B32

alors on a :

B33

III.1.3 – Compatibilité avec la multiplication

Soit a et b deux nombres réels vérifiant $a \leqslant b$. Si $c \geqslant 0$ alors $ac \leqslant bc$ et si $c \leqslant 0$ alors $ac \geqslant bc$. En langage mathématique cela s'écrit :

B34

En général ***on ne peut pas multiplier deux inégalités !*** On a par exemple :

B35

Mais cela est possible si les nombres sous ***tous positifs*** :

B36

Plus généralement si l'on dispose de nombres réels ***tous positifs*** $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ tels que :

B37

alors on a :

B38

III.1.4 – Passage à l'inverse

Si a et b sont deux nombre réels ***non nuls*** et de ***même signe*** tels que $a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

En langage mathématique :

B39

Cela est faux si les nombres sont de ***signes différents***. Par exemple :

B40

Attention, ***on ne peut pas diviser membre à membre des inégalités***. Par exemple :

B41

III.1.5 – Interprétation géométrique de la valeur absolue

Nous avons déjà vu que la distance entre deux nombres réels a et b sur la droite réelle vaut $|b-a|$.

Cette remarque permet notamment de comprendre et de retenir facilement que les nombres réels x vérifiant $|x-a| \leqslant \varepsilon$ sont exactement les réels de l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Cela est fondamental en analyse pour bien comprendre les notions de limite, de continuité et de dérivabilité. En voici une illustration graphique :

B42

III.2 – Démonstration d'inégalités et résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$

III.2.1 – Signe d'un polynôme de degré 2

Reprenons l'étude de $P(x) = ax^2 + bx + c$ déjà évoquée à la section **II.1.1**.

(a) Dans le cas où le discriminant Δ est strictement positif on avait obtenu la factorisation suivante :

$$P(x) = a\left(x - \underbrace{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}_{r_1}\right)\left(x - \underbrace{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}_{r_2}\right)$$

On peut alors faire un tableau de signe (la notation $\operatorname{sgn}(a)$ désigne le signe de a) :

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
$x-r_1$		$-$			$+$		
$x-r_2$			$-$			$+$	
$(x-r_1)(x-r_2)$		$+$		$-$		$+$	
$P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$		$\operatorname{sgn}(a)$		$-\operatorname{sgn}(a)$		$\operatorname{sgn}(a)$	

Théorème – Quand $\Delta > 0$, on constate donc que $P(x)$ est du signe de a à « l'extérieur » des racines et du signe opposé à a entre les racines.

(b) Dans le cas où le discriminant est nul, $P(x)$ avait la factorisation suivante :

$$P(x) = a\left(x - \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{r_0}\right)^2$$

Théorème – Quand $\Delta = 0$, on constate que $P(x)$ s'annule en sa racine double r_0 et qu'elle reste non nulle et du signe de a partout ailleurs.

(c) Dans le cas où le discriminant est strictement négatif, on avait obtenu :

$$P(x) = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{(-\Delta)}{4a^2}}_{>0}\right]$$

Théorème – Quand $\Delta < 0$, on constate que $P(x)$ n'est jamais nulle et reste du signe de a.

Méthode A.5

Pour démontrer une inégalité on peut utiliser une des méthodes suivantes (liste non exhaustive) :

- Pour démonter une inégalité de la forme $a \leqslant b$ il est équivalent de démontrer que $b-a \geqslant 0$. Pour cela on peut factoriser l'expression $b-a$ et faire une étude du signe de chaque facteur.
- Pour démontrer une inégalité, il peut parfois être judicieux de faire apparaitre une identité remarquable et utiliser, par exemple, le fait qu'un carré de réel est toujours positif.
- Pour démontrer une inégalité de la forme $a(x) \leqslant b(x)$ où x est une variable réelle appartenant à un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, on peut faire l'étude des variations (et ensuite du signe) sur I de la ***fonction différence*** $f : x \longmapsto b(x) - a(x)$.

Exercice A24

Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

Exercice A25

Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$.

Exercice A26

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

2. Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité ?

3. Illustrer et interpréter cette inégalité graphiquement.

Méthode A.6

Pour résoudre une inéquation on peut utiliser une des méthodes suivantes (liste non exhaustive) :

- Pour résoudre une inéquation de la forme $a(x) \leqslant b(x)$ on peut factoriser $b(x)-a(x)$ et faire une étude de signe que l'on présente sous la forme d'un tableau.
- Dans le cas particulier d'une inéquation polynomiale de degré 2 il faut retenir que l'expression ax^2+bx+c est du signe de a à l'***extérieur*** des racines (s'il y en a) et du signe opposé à l'intérieur des racines.
- Pour résoudre une inéquation de la forme $a(x) \leqslant b(x)$ on peut également faire l'étude des variations (et ensuite du signe) de la ***fonction différence*** $f : x \longmapsto b(x) - a(x)$.

Exercice A27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(x+5)(2x-1) \leqslant (3x-7)(2x-1)$ **2.** $\dfrac{(5x-2)(3x+4)}{(5-4x)(x+2)} \geqslant 0$ **3.** $\dfrac{x+5}{x-2} < \dfrac{x-4}{x+3}$

Méthode A.7

- Pour encadrer $a-b$ ***sans soustraire des inégalités***, on encadre a, puis $-b$ et on ajoute ces deux encadrements.
- Pour encadrer un quotient $\frac{a}{b}$, il faut faire attention de ne travailler qu'avec des ***nombres positifs*** (ou tous négatifs).
- Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leur carré. En effet les carrés et les racines carrés de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que les deux nombres initiaux.

Exemples

1 ▶ Sachant que $2 \leqslant a \leqslant 4$ et $3 \leqslant b \leqslant 10$, cherchons un encadrement de $\dfrac{a}{b}$.

B43

2 ▶ Comparons les deux nombres $a = 17$ et $b = 12\sqrt{2}$.

B44

Méthode A.8

Pour résoudre une inéquation contenant une ou plusieurs valeurs absolues on peut procéder par ***disjonction de cas***, en fonction du signe des expressions figurant dans les valeurs absolues.

Exercice A28

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2 + |x+1| \geqslant 3x + 1$.

Indication – *Pour supprimer la valeur absolue on procédera par disjonction de cas en séparant le cas où* $x+1 \geqslant 0$ *et le cas où* $x+1 \leqslant 0$. *Autrement dit on résoudra l'inéquation séparément sur* $[-1, +\infty[$ *et* $]-\infty, -1]$.

Exercice A29

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|4x+1| \geqslant 2$
2. $|3x-2| \leqslant x+1$

Fin du chapitre