Chapitre

B

Cours et exercices

Fonctions usuelles

Le but de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les connaissances acquises au lycée concernant les fonctions d'une variable réelle.
L'accent est volontairement mis sur les aspects pratiques (dérivation, étude de limites, *etc.*), les considérations plus théoriques seront étudiées plus tard dans l'année.
La partie **III** est le catalogue de fonctions usuelles au programme en ECG-1, pour le parcours « mathématiques appliquées ».

Sommaire

I Généralités sur les fonctions 1
- I.1 Notion de fonction 1
- I.2 Opérations sur les fonctions 4
- I.3 Notion de bijection et de fonction réciproque 5

II Cas particulier des fonctions réelles d'une variable réelle 7
- II.1 Propriétés éventuelles d'une fonction réelle d'une variable réelle 7
- II.2 Rappels et compléments sur la dérivation 10
- II.3 Applications de la dérivation 13
- II.4 Continuité sur un intervalle 13
- II.5 Cas des fonction continues et strictement monotones sur un intervalle de $\mathbb{R}$ 14

III Catalogue de fonctions usuelles 17
- III.1 Fonctions puissances (exposants entiers) 17
- III.2 Fonction racine carrée 19
- III.3 Fonction valeur absolue 19
- III.4 Partie entière 20
- III.5 Polynômes et/ou fonctions polynomiales 20
- III.6 Fonctions rationnelles 23
- III.7 Fonctions exponentielle et logarithme népérien 24
- III.8 Fonctions puissances (exposants quelconques) 25

IV Exercices additionnels 27

I – Généralités sur les fonctions

N-B Les ensembles sur lesquels nous allons travailler seront la plupart du temps des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ mais la présentation est faite dans un contexte plus général.

I.1 – Notion de fonction

I.1.1 – Définition (intuitive)

Soit E et F deux ensembles. Une fonction (ou application) f de E dans F est un moyen d'***associer*** à chaque élément x de E un ***unique élément*** de F appelé son ***image*** par f et qui est noté $f(x)$.

On dit que E est l'***ensemble de départ*** de f (ou son ***ensemble de définition***) et que F est son ***ensemble d'arrivée***.

Remarques

1 ▶ Très souvent, une fonction est définie à l'aide d'une formule permettant d'exprimer $f(x)$ ***en fonction*** de x. Par exemple, la fonction f qui à tout réel x associe le réel x^3+1 est notée :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3+1 \end{array}$$

2 ▶ La donnée des ensembles de départ et d'arrivée, fait partie de la définition d'une fonction. Par exemple, les fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

sont différentes car elles n'ont pas le même ensemble de départ.

3 ▶ Si f est une fonction de E dans F et que A est une partie (ou sous-ensemble) de E, on appelle restriction de f à A la fonction :

$$f_{|\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

La fonction $f_{|\mathrm{A}}$ fait bien sûr « la même chose » que f. Elle n'a simplement pas le même ensemble de départ. Cela a de l'importance car une fonction et ses restrictions peuvent avoir des propriétés globales différentes. Dans ce qui précède f n'est pas une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, mais $g = f_{|\mathbb{R}_+}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4 ▶ Il est fondamental de comprendre la différence entre f et $f(x)$. La notation $f(x)$ désigne l'élément de F résultant de l'***application*** de f à x. Alors que la notation f désigne la fonction elle même.

> Une image amusante qui permet de bien fixer les idées est la suivante : si f désigne un hachoir à viande et x un morceau de viande alors $f(x)$ est un tas de viande hachée. ***Confondriez-vous un hachoir à viande et un tas de viande hachée ?* ;-)**

5 ▶ Il est fréquent que l'ensemble de départ ne soit pas donné lors d'un exercice et que la première question consiste à le déterminer (dans ce cas on cherche le plus grand possible).

6 ▶ L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ou F^{E}.

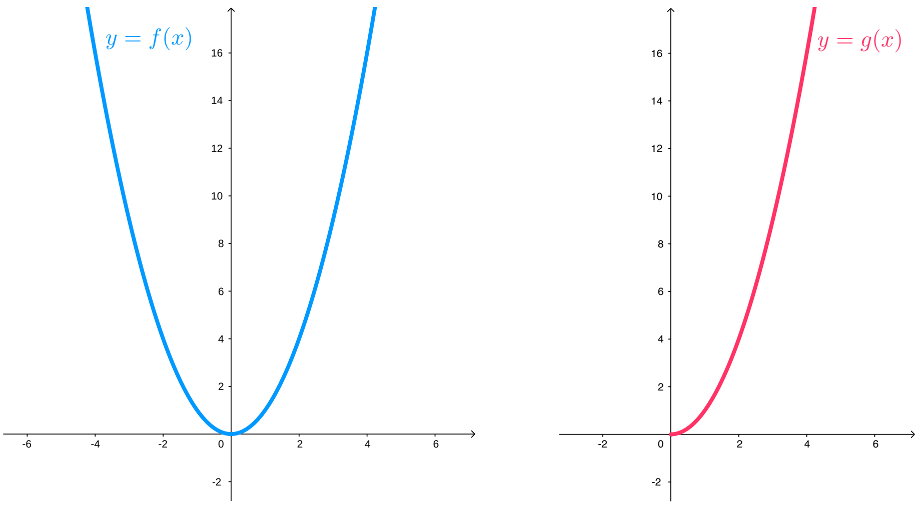
I.1.2 – Définition (Graphe d'une fonction)

À toute fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est associée son ***graphe***, qui est un sous-ensemble de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$:

$$\mathscr{C}_f = \left\{ \big(x, f(x)\big), x \in \mathrm{E} \right\}$$

Remarque – Dans le cas où E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, il est possible de dessiner le graphe de f (on parle aussi de courbe représentative) en munissant le plan d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

Exemple – Les graphes des fonctions $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ sont par exemples les suivants :



I.1.3 – Définition (Image et antécédent(s))

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction.

(i) Pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'élément $f(x)$ est appelé ***l'image*** de x par f.

(ii) Pour tout $y \in \mathrm{F}$, tout élément x de E vérifiant $y = f(x)$ est appelé ***un antécédent*** de y par f.

Remarques

1 ▶ Par définition d'une fonction, un élément x de E a toujours une unique image.

2 ▶ En revanche un élément y de F peut avoir plusieurs antécédents. Précisément, pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'ensemble des antécédents de y par f sont les solutions dans E de l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x).

3 ▶ Un élément de F peut aussi n'avoir aucun antécédent.

B1

I.1.4 – Définition (Image et « tiré en arrière » d'une partie)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction.

(i) Si A est une partie de E on appelle ***image*** de A par f l'ensemble des images de tous les éléments de A :

$$f(\mathrm{A}) \overset{\text{déf}}{=} \{f(x),\ x \in \mathrm{A}\} = \{y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{A},\ y = f(x)\}$$

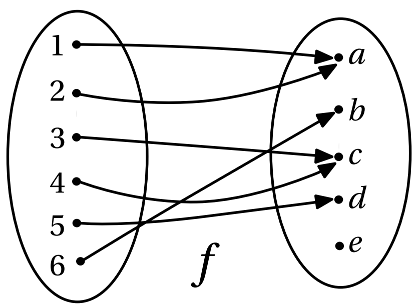
(ii) Si B est une partie de F on appelle ***tiré en arrière*** de B par f l'ensemble des antécédents des éléments de B. Autrement dit, c'est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B :

$$f^{\leftarrow}(\mathrm{B}) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{B}\}$$

⚠ ATTENTION

La notation officielle pour $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$ est $f^{-1}(\mathrm{B})$ et le vocabulaire n'est pas « tiré en arrière de B par f » mais « image réciproque de B par f ». La notation et le vocabulaire officiel est, d'expérience, une source de confusions et d'erreurs ***absolument désastreuses***. L'exposant -1 peut en effet laisser croire que f est bijective et que l'on utilise sa réciproque f^{-1} (voir ci-après). Or, ce n'est pas du tout le cas : nul besoin que la fonction f soit bijective pour définir $f^{-1}(\mathrm{B})$.

Soit $f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{a,b,c,d,e\}$ représentée par le schéma ci-après.
On pose $\mathrm{A} = \{1,2,3,4\}$ et $\mathrm{B} = \{a,b,d\}$.
Déterminons $f(\mathrm{A})$ et $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$:



B2

Remarques

1 ▶ L'ensemble de toutes les valeurs possibles de f, c'est à dire $f(\mathrm{E})$ est parfois appelée image de f et est notée $\mathrm{Im}(f)$. On a bien sûr $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{F}$, mais il se peut que certains éléments de F ne soit pas dans $\mathrm{Im}(f)$ (ils ne sont pas ***atteints*** par la fonction).

2 ▶ Ainsi, $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$ est l'ensemble des antécédents de tous les éléments de B. En particulier, pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'ensemble $f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$ est exactement l'ensemble des antécédents de l'élément y.

3 ▶ En probabilité, si on a une variable aléatoire réelle $\mathrm{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et un ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ alors l'événement $\big[\mathrm{X} \in \mathrm{A}\big]$ est par définition $\mathrm{X}^{\leftarrow}(\mathrm{A}) = \big\{\omega \in \Omega,\ \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{A}\big\}$. Avec la notation officielle : $\big[\mathrm{X} \in \mathrm{A}\big] = \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A}) = \big\{\omega \in \Omega,\ \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{A}\big\}$.

I.2 – Opérations sur les fonctions

I.2.1 – Définition (Opérations algébriques)

Si F est muni d'une opération $\star$, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est naturellement muni d'une opération associée que l'on note (abusivement!) de la même manière :

$$f \star g : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \star g(x) \end{array}$$

Remarques

1 ▶ Autrement dit, pour tout $x \in \mathrm{E}$ on a : $\quad (f \star g)(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) \star g(x)$.

2 ▶ Dans le cas particulier où F est une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ est donc muni d'une addition, d'une soustraction et d'une multiplication. Pour la division de deux fonctions, il y a bien sûr une condition : que la fonction, située au dénominateur ne soit jamais nulle.

I.2.2 – Définition (Composition)

Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$. On appelle ***composée*** de u et f la fonction $f \circ u$ définie sur E par :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ f \circ u(x) \overset{\text{déf}}{=} f\big(u(x)\big)$$

Remarques

1 ▶ On peut représenter la composition à l'aide du schéma suivant :

B3

2 ▶ Pour que $f \circ u$ soit bien définie, il est essentiel que l'ensemble de départ de f contienne l'ensemble d'arrivée de u (dans la définition adoptée ici ces ensembles sont même égaux).

3 ▶ Il arrive assez souvent, en exercice, qu'une fonction soit donnée comme une composée $g = f \circ u$ sans que son ensemble de définition soit précisé. Pour déterminer celui-ci on peut écrire :

$$g(x) = f\big(u(x)\big) \text{ est bien défini} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \text{ est dans l'ensemble de définition de } u \\ \quad \textbf{ET} \\ u(x) \text{ est dans l'ensemble de définition de } f \end{cases}$$

Exercice B1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)}$$

I.3 – Notion de bijection et de fonction réciproque

I.3.1 – Définition (Fonction bijective)

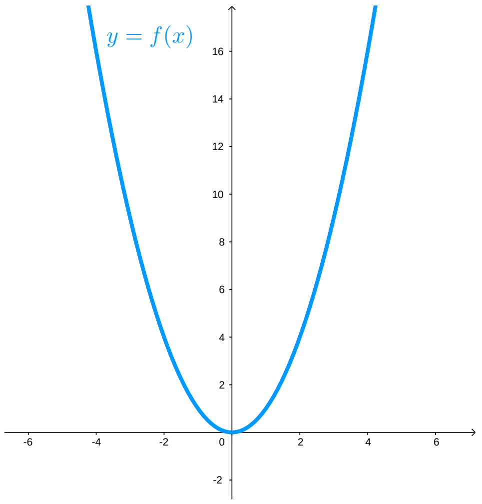
Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une fonction. On dit qu'elle est ***bijective*** ou que c'est une ***bijection*** si tout élément de Y possède ***un unique antécédent*** par f c'est-à-dire :

$$\forall y \in \mathrm{Y},\ \exists! x \in \mathrm{X},\quad f(x) = y$$

Exemples

1 ▸ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ dont la représentation graphiques est donnée ci-contre.
Est-elle bijective ? Pourquoi ?

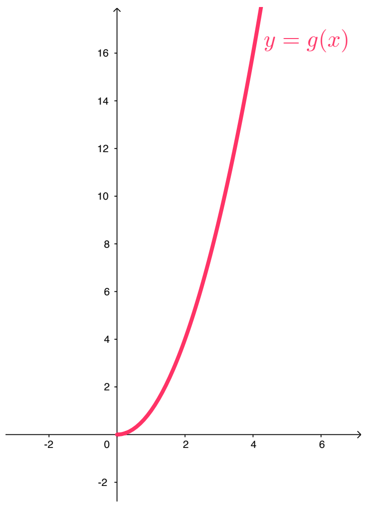
B4



2 ▸ Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ dont la représentation graphiques est donnée ci-après.

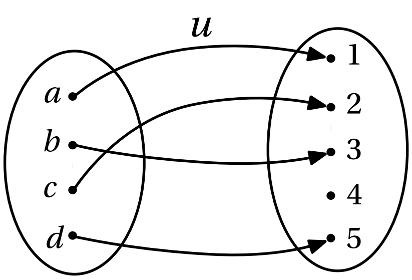
Est-elle bijective ? Pourquoi ?

B5



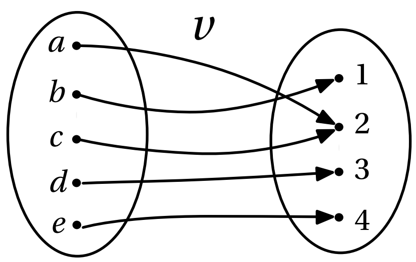
3 ▸ Soit $u : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ représentée par le schéma ci-après.
Est-elle bijective ? Pourquoi ?

B6



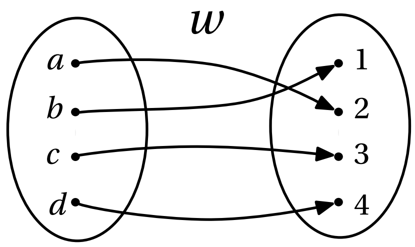
4 ▶ Soit $v : \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ représentée par le schéma ci-après.
Est-elle bijective ? Pourquoi ?

B7



5 ▶ Soit $w : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ représentée par le schéma ci-après.
Est-elle bijective ? Pourquoi ?

B8

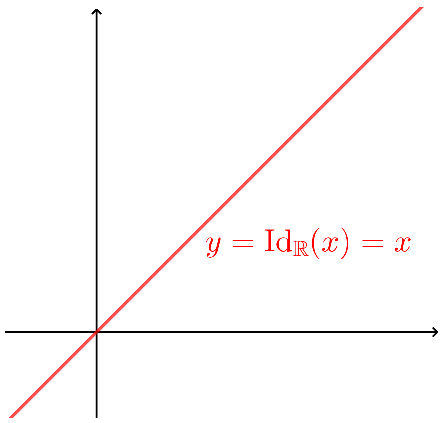


I.3.2 – Définition

Soit X un ensemble. On appelle ***fonction identité*** de X l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} : & \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathrm{X} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Exemple – Pour $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ le graphe de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est la droite d'équation $y = x$ (appelée première bissectrice).



I.3.3 – Définition

Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une fonction ***bijective***. On appelle ***réciproque*** de f la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & \mathrm{Y} & \longrightarrow & \mathrm{X} \\ & y & \longmapsto & \text{« l'unique antécédent de } y \text{ par } f \text{ »} \end{array}$$

Exemple – Si $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ alors la réciproque est $\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$

I.3.4 – Proposition (Propriété d'une fonction réciproque)

Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une bijection et $f^{-1} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ sa réciproque. On a alors :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}} \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$$

Autrement dit on a :

$$\forall y \in \mathrm{Y},\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y \qquad \text{et} \qquad \forall x \in x,\ f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

Exercice B2

Démontrer la proposition précédent.

I.3.5 – Théorème (Caractérisation de la bijectivité)

Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.

(i) La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$.

(ii) Dans ce cas g est unique et on a $g = f^{-1}$.

Exercice B3

Démontrer le théorème précédent.

I.3.6 – Proposition (Bijectivité d'une réciproque)

Si f est une bijection alors f^{-1} l'est aussi et sa réciproque est :

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

II – Cas particulier des fonctions réelles d'une variable réelle

II.1 – Propriétés éventuelles d'une fonction réelle d'une variable réelle

II.1.1 – Définition (Parité)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ supposée ***symétrique par rapport à*** 0, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ -x \in \mathrm{A}$$

(i) On dit que $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est ***paire*** si :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(-x) = f(x)$$

(ii) On dit que f est ***impaire*** si :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(-x) = -f(x)$$

Remarques

1 ▶ Si f est une fonction paire, alors l'axe $(\mathrm{O}y)$ est axe de symétrie du graphe de f.

2 ▶ Si f est une fonction impaire, alors le centre du repère O un centre de symétrie du graphe de f.

3 ▶ Une fonction peut n'être ni paire, ni impaire. Exemple :

B9

4 ▶ Si f est une fonction impaire définie en 0 alors on a obligatoirement $f(0) = 0$. En effet :

B10

Exercice B4

Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique $f = g + h$ avec g paire et h impaire.
Indication – *On pourra procéder par analyse et synthèse.*

II.1.2 – Définition (Monotonie)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f est ***croissante*** (on précise parfois ***au sens large***) si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \ \ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

(ii) On dit que f est ***strictement croissante*** si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \ \ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

(iii) On définit de même les notions de fonctions ***décroissantes*** et ***strictement décroissantes***.

(iv) On dit qu'un fonction est ***monotone*** (resp. ***strictement monotone***) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Remarques

1 ▶ La somme de deux fonctions croissantes est croissantes.

2 ▶ En général, le produit de deux fonctions croissantes n'est pas une fonction croissante (c'est vrai pour des fonctions positives).

Exercice B5 (Composée de deux fonctions croissantes)

Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux fonctions croissantes (A, B et C étant des parties de $\mathbb{R}$), démontrer que la fonction composée $g \circ f : A \to C$ est également croissante.

Remarque – Plus généralement la composée de deux fonctions (strictement) monotones de même sens de variation est une fonction (strictement) croissante. De manière analogue la composée de deux fonctions (strictement) monotones de sens de variation opposé est une fonction (strictement) décroissante.

II.1.3 – Définition (Fonction minorée, majorée, bornée)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f est ***majorée*** sur A s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in A, \ f(x) \leqslant M$$

Un tel réel M est appelé un ***majorant*** de f.

(ii) On dit que f est ***minorée*** sur A s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in A, \ m \leqslant f(x)$$

Un tel réel m est appelé un ***minorant*** de f.

(iii) On dit que f est ***bornée*** si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque – D'un point de vue géométrique, f est majorée par M signifie que $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de la droite horizontale d'équation $y = M$. De même, f est minorée par m signifie que cette courbe $\mathscr{C}_f$ reste au dessus de la droite horizontale d'équation $y = m$.

B11

Exercice B6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Démontrer que f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

II.1.4 – Définition (Maximum, Minimum, Extremum)

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$.

(i) On dit que f admet un ***maximum*** en a si :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(x) \leqslant f(a)$$

On dit alors que $f(a)$ est ***le maximum*** de f sur A et on note :

$$f(a) = \max_{x \in \mathrm{A}} f(x)$$

(ii) On dit que f admet un ***minimum*** en a si :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(a) \leqslant f(x)$$

On dit alors que $f(a)$ est ***le minimum*** de f sur A et on note :

$$f(a) = \min_{x \in \mathrm{A}} f(x)$$

(iii) On dit que f admet un ***extremum*** en a si elle admet en ce point un maximum ou un minimum.

Remarques

1 ▶ L'étude des variations d'une fonction (résumée dans un tableau) peut permettre de repérer d'éventuels extrémums.

2 ▶ Un extremum peut être atteint plusieurs fois.

3 ▶ Une fonction f possède un maximum si et seulement si elle possède un majorant qui est une valeur atteinte par la fonction f.

4 ▶ Une fonction majorée, peut ne pas avoir de maximum. De même une fonction minorée peut ne pas avoir de minimum.

Exemple – Analysons la courbe suivante :

B12

II.2 – Rappels et compléments sur la dérivation

II.2.1 – Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I et f une fonction définie sur I.

(i) On dit que f est ***dérivable*** en a si la fonction suivante :

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} \mathrm{I}\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

(appelée taux d'accroissement au point a) possède une limite **finie** en a.

(ii) Dans ce cas, cette limite finie est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

(iii) On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas la ***fonction dérivée*** de f est la fonction :

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}.$$

Remarque – Nous noterons $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I (à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Exemple – Étudions la dérivabilité de la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$.

B13

II.2.2 – Interprétation géométrique

Si A et X sont les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse respectives a et x, on constate que $\tau_a(x)$ est la ***pente*** de la droite (AX).

L'existence d'une limite pour $\tau_a(x)$ signifie l'existence d'une ***position limite*** pour la droite (AX) lorsque x tend vers a. Le fait que cette limite soit ***finie*** signifie que cette position limite n'est ***pas verticale*** (en cas de dérivabilité). Cette droite limite (si elle existe), est appelée ***tangente*** à la courbe de f au point d'abscisse a.

B14

En cas d'existence, la tangente au point d'abscisse a a pour pente $f'(a)$ et comme elle passe par le point de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ elle a pour équation cartésienne :

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)\big(x-a\big)}.$$

Démonstration (pour l'équation de la tangente)

B15

Remarques

1 ▶ Si on constate l'existence d'une ***tangente verticale*** à la courbe d'une fonction cela implique que cette fonction n'est ***pas*** dérivable au point correspondant.

2 ▶ À ce stade du chapitre, nous n'avons pas encore revue la notion de ***continuité***. Mais vous pouvez déjà avoir en tête que :

- intuitivement, une fonction est continue sur un ***intervalle*** si sa courbe peut être tracée, « ***sans lever le crayon*** » (autrement dit, si elle ne présente pas de « saut ») ;
- ***la dérivabilité implique la continuité*** mais ***la réciproque est fausse*** (un des exemples les plus simples est celui de la fonction racine carrée en 0).

II.2.3 – Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables)

Soit $(f,g)\in\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

(i) La fonction λf est dérivable et on a :
$$(\lambda f)'=\lambda f'$$

(ii) La fonction $f+g$ est dérivable et on a :
$$(f+g)'=f'+g'$$

(iii) La fonction fg est dérivable et on a :
$$(fg)'=f'g+fg'$$

(iv) La fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et on a :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

II.2.4 – Proposition (Dérivation composée)

Soit $u\in\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathrm{J})$ et $f\in\mathscr{D}(\mathrm{J},\mathbb{R})$. Alors la fonction composée $f\circ u$ est dérivable sur I et on a :
$$\forall x\in\mathrm{I},\ \ (f\circ u)'=u'\times f'\circ u$$

Remarque – La formule de dérivation composée généralise plusieurs résultats du lycée :
$$\big(\exp(u)\big)'=u'.\exp(u)\qquad \big(\ln(u)\big)'=\frac{u'}{u}\qquad \left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}\qquad (u^2)'=2u.u'$$

Exercice B7

Sans se soucier de son ensemble de définition, ni même de son ensemble de dérivabilité (ce qu'il faudrait ***évidemment*** faire dans le cadre d'une étude complète) calculer la dérivée de la fonction : $f:x\mapsto\ln\left(x+\sqrt{x(1-x)}\right)$.

Exercice B8

Sans se soucier des ensemble de définitions, ni même des ensembles de dérivabilité, (ce qu'il faudrait ***évidemment*** faire dans le cadre d'études complètes), calculer les dérivées des fonctions données par :

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2. $g(x)=\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$

4. $\varphi(x)=\sqrt{5x^2+\ln(x)}$

5. $\psi(x)=(2-3x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

II.2.5 – Définition (Dérivées successives)

Sous réserve d'existence, les dérivées successives de $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ sont définies par :
$$\begin{aligned} f^{(0)}&=f\\ f^{(1)}&=f'\\ f^{(k+1)}&=\left(f^{(k)}\right)'\quad\text{pour tout } k\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Remarque – On note généralement $f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=f''$ et $f^{(3)}=f'''$.

Exercice B9

Calculer les dérivées successives $f^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(3-2x)$.

Indication – *Calculer les premières dérivées, conjecturer une formule générale, puis la démonter par récurrence.*

II.3 – Applications de la dérivation

II.3.1 – Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) La fonction f' est nulle si et seulement si f est constante.

(ii) La fonction f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I.

(iii) La fonction f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur I.

(iv) Si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

(v) Si $f' < 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarques

1 ▶ Cette caractérisation des fonctions constantes n'est vrai que sur un intervalle (faux sinon).

2 ▶ Il est important de préciser dans ***(iv)*** et ***(v)*** que f' peut s'annuler en un nombre fini de points. L'exemple le plus simple est sans doute la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 où elle s'annule. Cette fonction f est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Méthode B.1 (Plan d'étude d'une fonction)

S'il est demandé de faire ***l'étude complète*** d'une fonction cela signifie :

- trouver son ensemble de définition en la décomposant (opérations algébriques ou composition) en fonctions plus simples;
- réduire éventuellement l'ensemble d'étude en remarquant que la fonction est paire ou impaire;
- se demander si elle est dérivable (par exemple si c'est une somme, produit et/ou composée de fonctions dérivables connues);
- faire le calcul de sa dérivée (éventuellement l'ensemble de dérivabilité peut être plus petit que l'ensemble de définition);
- factoriser l'expression de la dérivée (mise au même dénominateur, recherche de racines évidentes, *etc.*);
- dresser un tableau de variation en précisant les valeurs particulières (annulation de la dérivée);
- compléter le tableau de variation en précisant les valeurs ou limites aux points remarquables;
- étudier la présence d'asymptotes et préciser leur nature;
- effectuer un tracé (une ébauche approximative sera souvent suffisante, sauf mention contraire).

Exercice B10

Étudier et tracer les courbes représentatives des fonctions définies par :

1. $f(x) = x^3 - 3x + 4$

2. $g(x) = \dfrac{x^2+2x+7}{2x+3}$

II.4 – Continuité sur un intervalle

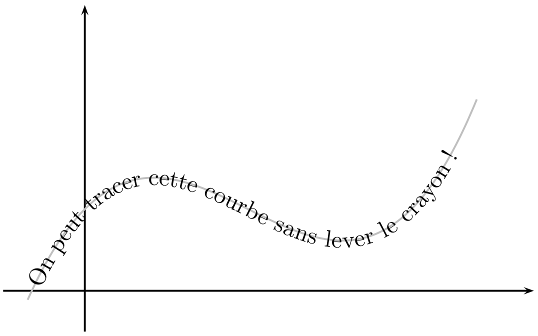
II.4.1 – Définition

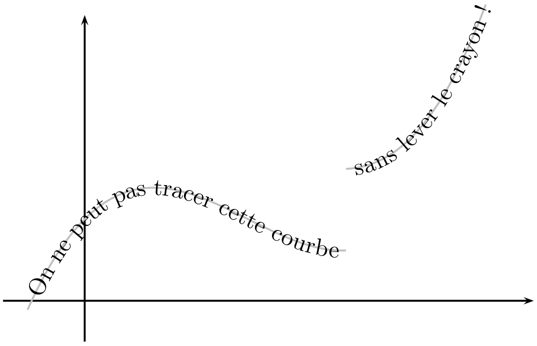
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

(i) On dit que f est ***continue*** au point $x_0 \in$ I si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.

(ii) On dit que f est ***continue sur*** I si elle est continue en tout point de I.

Intuitivement, une fonction f définie sur un intervalle est continue si sa courbe peut être dessiner « sans lever le crayon » (autrement dit s'il n'y a pas de « saut »).



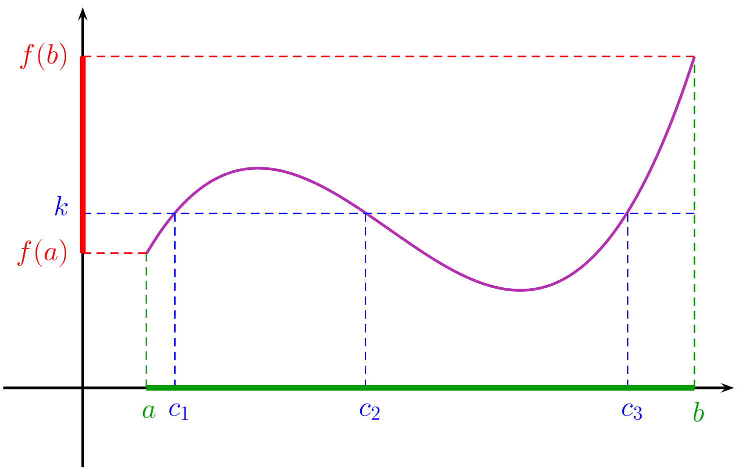


II.4.2 – Théorème (des valeurs intermédiaires)

> Soit I un ***intervalle*** de $\mathbb{R}$ et f une fonction ***continue*** sur I. Si a et b sont deux éléments de I vérifiant $a < b$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Exemple – Considérons un randonneur qui part de l'altitude 1100 m et qui veut atteindre un lac situé à l'altitude 1800 m. Alors il y a nécessairement un moment (***peut-être plusieurs***) où il va passer à l'altitude 1500 m. En fait cela est vraie car la progression de ce randonneur est ***continue*** : il ne passe pas d'un coup de 1499 à 1501 m (on suppose évidemment que le randonneur n'a pas la faculté de se téléporter !).

Remarque – Ce théorème permet d'affirmer que si f est continue, l'***équation*** $f(x) = k$ a toujours au moins une solution dès que k est entre $f(a)$ et $f(b)$. Bien entendu, il peut y avoir ***plusieurs solutions***.



II.5 – Cas des fonction continues et strictement monotones sur un intervalle de $\mathbb{R}$

II.5.1 – Théorème (Corollaire du TVI pour une fonction strictement monotone)

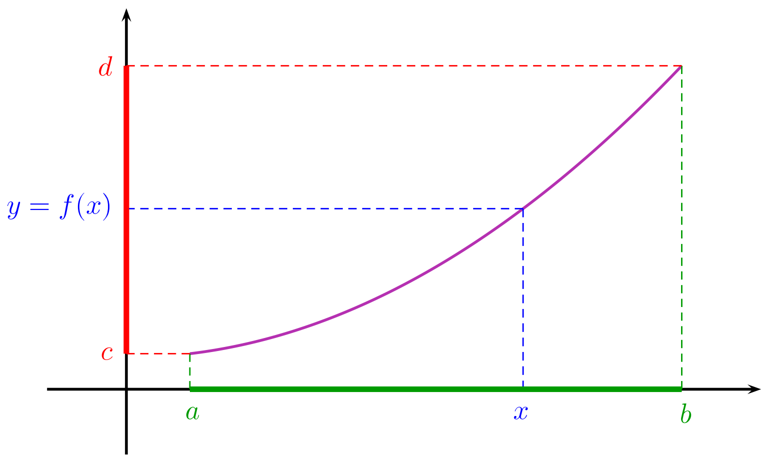
> Soit I un ***intervalle*** de $\mathbb{R}$ et f une fonction ***continue*** et **strictement monotone** sur I. Si a et b sont deux éléments de I vérifiant $a < b$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un **unique** $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque – La seule chose qui change est l'**unicité** du point c en lequel la valeur intermédiaire est atteinte. Cette unicité provient bien sûr de la **stricte monotonie**.

II.5.2 – Cas particulier d'une fonction strictement croissante sur un segment

Soit f une fonction continue et strictement croissante définie sur un intervalle $[a, b]$ et notons $c = f(a)$ et $d = f(b)$. Ainsi, f est une fonction de $[a, b]$ dans $[c, d]$.

Alors pour tout $y \in [c, d]$ l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution $x \in [a, b]$ (l'existence provient de la continuité et du théorème des valeurs intermédiaires et l'unicité provient de la ***stricte*** monotonie).



Autrement dit, pour tout $y \in [c, d]$, il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. En langage mathématique cela s'écrit :

B16

Cela vous rappelle-t-il quelque chose ? Normalement oui ! Voici un théorème qui va clarifier les choses.

II.5.3 – Théorème (Dit « de la bijection » : trois hypothèses et trois conclusions)

Soit f une fonction ***continue*** et ***strictement monotone*** sur un ***intervalle*** I. Alors :

(i) $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ est un intervalle ;

(ii) f est une bijection de I sur J ;

(iii) La bijection réciproque $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ est continue et strictement monotone (de même sens que f).

Exemples

1 ▶ La fonction racine carrée $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est la réciproque de la fonction « élévation au carré » $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

2 ▶ La fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la réciproque de la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

3 ▶ Comme évoqué dans la **remarque 2 page 13** la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle y est évidemment continue (car polynomiale) et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. D'après le théorème de la bijection il s'agit donc d'une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa réciproque est la fonction ***racine cubique*** $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

⚠ ATTENTION

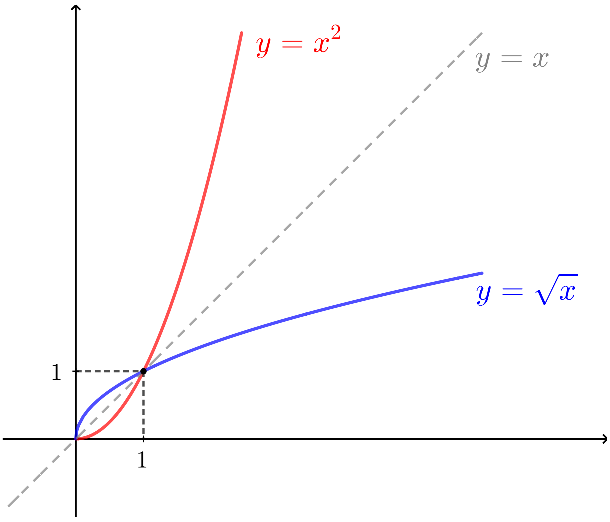
- Ne **SURTOUT PAS** confondre le **TVI**, son **corollaire**, et le **théorème de la bijection**.
- Le **corollaire du TVI** et le **théorème de la bijection** ont les mêmes hypothèses (continuité et stricte monotonie sur un intervalle) et ont des conclusions qui se recoupent en partie.
- En revanche le **TVI « classique »** a une hypothèse **en moins** : la stricte monotonie. Et cela fait une **énorme différence** : l'éventuelle **non-unicité** du nombre réel c dans son énoncé.

II.5.4 – Proposition

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une bijection. Alors les graphes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Exemples

1 ▶ Pour les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ on a les graphes suivants :



2 ▶ Pour les fonctions exponentielle et logarithme népérien on a les graphes suivants :

II.5.5 – Théorème (de dérivabilité d'une réciproque, à la limite du programme)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et notons $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. Si f est dérivable et que f' n'est ***jamais nulle***, alors la réciproque f^{-1} est dérivable sur J.

Remarques

1 ▶ Dans le parcours « mathématiques approfondies », ce théorème est complété par une formule exprimant la dérivée de f^{-1} en fonction de celle de f.

2 ▶ Dans le théorème complet, une autre propriété est importante : si f est dérivable au point a avec $f'(0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en $b = f(a)$ et la courbe de f^{-1} présente en b une tangente verticale.

Exemples

1 ▶ Considérons les deux fonctions $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$, réciproque l'une de l'autre.

B18

2 ▶ Considérons la fonction ln, réciproque de la fonction exponentielle.

B19

III – Catalogue de fonctions usuelles

III.1 – Fonctions puissances (exposants entiers)

III.1.1 – Définition (Rappel : puissances entières d'un réel)

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle puissance n-ième du réel x le nombre :

$$x^n \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, par convention : $x^0 = 1$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$x^{-n} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

III.1.2 – Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur son ensemble de définition ($\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$) et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$

Démonstration dans le cas $n \geqslant 1$

B20

III.1.3 – Variations et graphe de $x \mapsto x^n$

B21

n pair $\geqslant 2$ n impair $\geqslant 1$

B22

n pair $\leqslant -2$ n impair $\leqslant -1$

III.2 – Fonction racine carrée

III.2.1 – Définition (Racine carrée)

(i) On rappelle que la racine carrée d'un nombre réel ***positif*** x est l'unique nombre réel y tel que $y^2 = x$ et que l'on note $y = \sqrt{x}$.

(ii) La ***fonction racine carrée*** est la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

III.2.2 – Proposition

La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et son graphe présente en 0 une demi-tangente verticale. Par ailleurs, sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

III.2.3 – Variations et graphe de la fonction racine carrée

La dérivée de cette fonction étant strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, cela permet d'affirmer qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (d'après le théorème **II.3.1**).

Sa représentation graphique a déjà été donnée dans l'exemple **1** page **16**.

III.3 – Fonction valeur absolue

III.3.1 – Définition (Valeur absolue d'un réel)

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} = \max(x, -x)$.

Le graphe de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est le suivant :

B23

III.3.2 – Proposition

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sur $\mathbb{R}_-^*$ sa dérivée est la constante -1 et sur $\mathbb{R}_+^*$ c'est la constante 1.

Elle n'est pas dérivable en 0 (dérivée à droite différente de la dérivée à gauche en ce point).

III.4 – Partie entière

III.4.1 – Théorème et Définition (Partie entière d'un nombre réel)

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $k \leqslant x < k+1$.

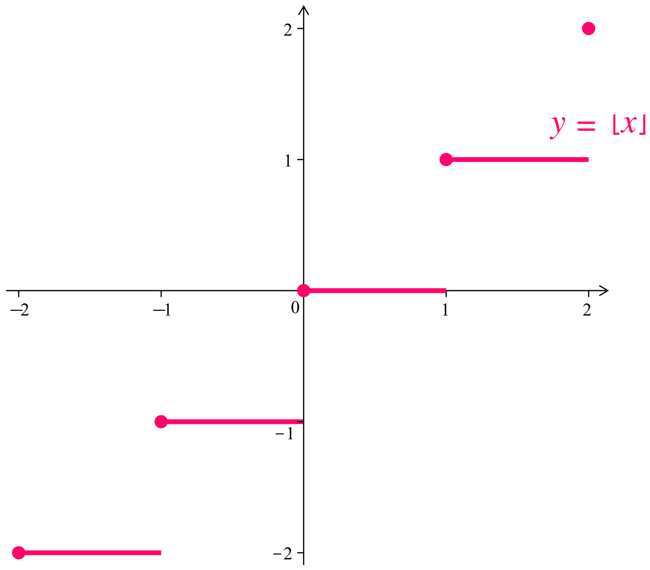
(ii) On dit que k est la ***partie entière de*** x et on écrit $k = \lfloor x \rfloor$.

Remarques

1 ▶ Attention au cas des nombres négatifs : $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$ mais $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$.

2 ▶ L'encadrement de la définition s'écrit donc : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
On en déduit facilement le deuxième encadrement suivant : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

3 ▶ Voici le graphe de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ définie sur $\mathbb{R}$ (le graphe est ici limité à l'intervalle $[-2, 2]$) :



✎ Exercice B11

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ montrer que :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

Indication – *Si on note $n = \lfloor x \rfloor$, distinguer les cas $x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right[$ et $x \in \left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[$.*

III.5 – Polynômes et/ou fonctions polynomiales

III.5.1 – Définition (Fonction polynomiale)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une application $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ***polynomiale de degré*** n s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ tels que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

Exemples

1 ▶ L'application suivante :

$$\mathrm{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$$

est polynomiale de degré 3. On note $\deg(\mathrm{P}) = 3$.

2 ▶ Si P est une fonction polynomiale de degré 0 alors il existe $a_0 \neq 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = a_0$. Ainsi, P est une fonction constante ***non nulle***.

3 ▶ On convient que l'application nulle est aussi polynomiale de degré $-\infty$: $\deg(0) = -\infty$.

4 ▶ L'application identité :

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

est polynomiale de degré 1.

5 ▶ **ATTENTION -** La notion intuitive de ***polynôme*** est la suivante : il s'agit d'une somme (pondérée par des coefficients réels) de puissances de x. Par exemple x^4+3x+1 est un polynôme (de degré 4).

MAIS dans le programme d'ECG il est demandé de confondre polynômes et fonctions polynomiales. Ainsi, les objets « x^4+3x+1 » et la fonction « $x \longmapsto x^4+3x+1$ » sont considérés comme identiques.
Cela va ***à l'encontre absolue*** de la mise en garde figurant dans la remarque **4** page **2** où il est demandé de bien faire la différence entre une fonction f et sa valeur $f(x)$ en un point x (souvenez vous du hachoir à viande !).
Cette contradiction est ***très regrettable***. Mais, en tout état de cause, compte tenu du programme, l'identification, entre P et $\mathrm{P}(x)$ pour une fonction polynomiale sera ***acceptée***, mais absolument ***prohibée*** pour des fonctions non polynomiales.

6 ▶ Conséquence (assez loufoque) de la remarque précédente : pour tout polynôme P on a l'égalité $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x)$. Vous pourrez donc indifféremment noter $\mathrm{P}=x^4+3x+1$ ou $\mathrm{P}(x)=x^4+3x+1$.

III.5.2 – Définition (Notation)

(i) L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[x]$.

(ii) L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.

Exemple – Soient $\mathrm{P}=x^7+3x^6-x^2+2$, $\mathrm{Q}=x^4-8x^2+1$. On a :
$$\mathrm{P}\in\mathbb{R}_7[x] \quad \text{mais} \quad \mathrm{P}\notin\mathbb{R}_6[x], \quad \mathrm{Q}\in\mathbb{R}_4[x] \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}\in\mathbb{R}_5[x]$$

Remarques

1 ▶ Un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ possède $n+1$ coefficients (éventuellement nuls). En seconde année vous verrez que « $\mathbb{R}_n[x]$ *est un espace vectoriel de dimension* $n+1$ ».

2 ▶ Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ vérifiant $n\leqslant k$ on a : $\quad \mathbb{R}_n[x]\subset\mathbb{R}_k[x]\subset\mathbb{R}[x]$

III.5.3 – Définition (Opérations algébriques)

Les polynômes étant (d'après l'identification imposée dans le programme) des fonctions, on peut effectuer des opérations classiques avec eux :

- addition de polynômes ;
- multiplication de polynômes ;
- et même composition de polynômes (mais en ECG nous nous en abstiendrons).

Remarques

1 ▶ Le degré d'un produit de polynôme est la somme des degrés : $\quad \deg(\mathrm{PQ})=\deg(\mathrm{P})+\deg(\mathrm{Q})$.

2 ▶ Pour une somme de deux polynômes P et Q, le degré de $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ vaut « souvent » $\max\big(\deg(\mathrm{P}),\deg(\mathrm{Q})\big)$ sauf si les termes de plus haut degré se simplifient. Le résultat général est donc : $\quad \deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\leqslant\max\big(\deg(\mathrm{P}),\deg(\mathrm{Q})\big)$.

Exercice B12

On considère les polynômes suivants : $\mathrm{P}=x^5+2x^4-3x^2$, $\mathrm{Q}=x^3-7x^2-1$ et $\mathrm{R}=-2x^5+x^3-2x+7$.

1. Quels sont les degrés de P, Q et R ?
2. Développer, réduire et ordonner le produit PQ. Quel est son degré ?
3. Réduire et ordonner la somme $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$. Quel est son degré ?
4. Réduire et ordonner le polynôme $2\mathrm{P}+\mathrm{R}$. Quel est son degré ?

III.5.4 – Proposition

Les fonctions polynomiales (ou polynômes) sont continues et dérivables (une infinité de fois) sur $\mathbb{R}$.

Remarques

1 ▶ Notons que si P est définie par $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ alors $P' = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$. De manière générale la dérivée d'un polynôme est un polynôme.

2 ▶ Si P est un polynôme de degré n dont le ***coefficient dominant*** (celui du terme de plus haut degré) est noté a_n, alors la dérivée n-ième de P est constante et vaut $n! a_n$. Sa dérivée $(n+1)$-ième et toute les suivantes sont nulles.

III.5.5 – Définition (Relation de divisibilité entre polynômes)

Soient $(A, B) \in \left(\mathbb{R}[x]\right)^2$. On dit que B ***divise*** A (ou que A est un ***multiple*** de B) s'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $A = BQ$.

III.5.6 – Théorème (Division euclidienne entre polynômes)

Soient $A \in \mathbb{R}[x]$ et $B \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$. Alors il existe Q et R deux polynômes uniques vérifiant :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \quad \text{ET} \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Remarque – Sous les hypothèses précédentes, B divise A si et seulement si $R = 0$.

Exemple – Procédons par exemple à la division euclidienne de $A = x^5 + 2x^3 + 3x^2 + x - 1$ par $B = x^2 - x + 1$.

B24

III.5.7 – Proposition (Factorisation à l'aide d'une racine)

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme réel.

(i) On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une racine de P si $P(a) = 0$.

(ii) Si a est une racine de P alors il existe un polynôme Q tel que :

$$P = (x - a)Q$$

c'est-à-dire (en termes de fonctions) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - a)Q(x)$$

Remarque – Si on détecte une racine « évidente » a (à chercher parmi les petits entiers relatifs) pour un polynôme P, on sait qu'il est divisible (factorisable) par $(x-a)$. Pour trouver le quotient, il suffit de poser la division.

III.5.8 – Théorème

Un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ ayant au moins $n+1$ racines distinctes est nécessairement le polynôme nul.

III.5.9 – Corollaire (Principe d'identification, version forte)

Deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ qui coïncident en au moins $n+1$ points réels distincts sont nécessairement égaux. On peut donc identifier leurs coefficients (degré par degré).

III.5.10 – Corollaire (Principe d'identification, version faible)

Deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ qui coïncident sur un ensemble infini (par exemple un intervalle) sont nécessairement égaux. On peut donc identifier leurs coefficients (degré par degré).

III.6 – Fonctions rationnelles

III.6.1 – Définition

On dit qu'une fonction est ***rationnelle*** si elle est le quotient de deux fonctions polynomiales.

Exemple – La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x^7-x^3}{1+x^2} \end{array}$ est une fonction rationnelle.

III.6.2 – Proposition

(i) Soit P et Q deux fonctions polynomiales. Alors la fonction rationnelle $f = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{\text{racines de Q}\}$.

(ii) Les fonctions rationnelles sont continues et dérivables (une infinité de fois) sur leur ensemble de définition.

Exemple – La fonction rationnelle donnée par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2-1}$ n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Remarques

1 ▶ La dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle.

2 ▶ Les fonctions rationnelles peuvent se décomposer en « ***éléments simples*** ». La théorie générale de cette décomposition est hors programme et un énoncé portant sur ce sujet comportera toujours une indication.

Exercice B13

1. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}, \quad \frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}$$

2. Calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x-7}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$$

III.7 – Fonctions exponentielle et logarithme népérien

III.7.1 – Généralités sur les fonctions exponentielle et logarithme népérien

Voir formulaire.

III.7.2 – Proposition (Croissances comparées « élémentaires »)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Démonstration de 1.

B25

III.7.3 – Proposition (D'autres limites à connaître *absolument*)

1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ **2.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Démonstration (très contestable...)

B26

III.8 – Fonctions puissances (exposants quelconques)

III.8.1 – Définition (puissance d'un réel strictement positif)

Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ on pose $a^b \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{e}^{b\ln(a)}$ qui se lit « a puissance b ».

Remarques

1 ▶ Dans le cas d'un exposant entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ on a $\mathrm{e}^{k\ln(a)} = \mathrm{e}^{\ln(a^k)} = a^k$ ce qui légitime la notation sous forme de puissance.

2 ▶ On a toujours $a^b > 0$ car il s'agit d'une valeur de la fonction exponentielle.

3 ▶ Dans le doute avec des exposant réels (non entiers), le plus sûr est de revenir à la définition sous la forme exponentielle.

III.8.2 – Proposition (Règles de calcul)

Pour tout $(a,b) \in \left(]0,+\infty[\right)^2$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ on a :

(i) $\ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$

(ii) $a^{c+d} = a^c a^d$

(iii) $\left(a^c\right)^d = a^{cd}$

(iv) $\left(ab\right)^c = a^c b^c$

(v) $a^{-c} = \dfrac{1}{a^c} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^c$

Démonstration de *(i)* et *(iii)*

Toutes ces formules proviennent des propriétés algébriques déjà connues des fonctions exp et ln.

B27

Exercice B14

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

III.8.3 – Définition (Fonction puissance d'exposant réel quelconque)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (quelconque). On appelle fonction puissance d'exposant α l'application suivante :

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)} \end{array}$$

Remarques

1 ▶ Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on retrouve les fonctions puissances déjà connues.

2 ▶ Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ (et $x > 0$) on a $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$. Ainsi, pour tout $x > 0$ on a : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
Nous verrons que que cette égalité reste vraie en 0 quand nous aurons prolongées les φ_α en 0 dans le cas $\alpha \geqslant 0$.

3 ▶ Pour $\alpha = \frac{1}{3}$ (et $x > 0$) on a $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$. Ainsi, pour tout $x > 0$ on a : $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.
Comme dans le cas précédent nous verrons que cette égalité reste vraie en 0.

III.8.4 – Proposition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction φ_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Remarque – Cette formule généralise la formule connue pour des exposants entiers.

Démonstration

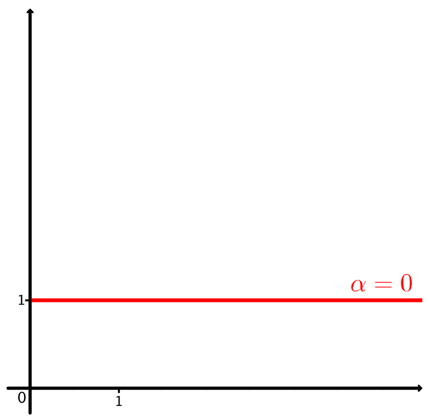
B28

III.8.5 – Variations et graphes

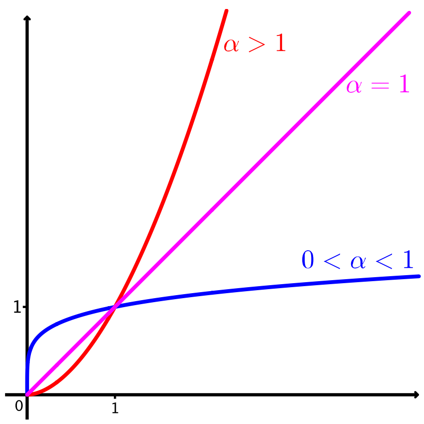
a) Si $\alpha = 0$ la fonction φ_α est constante égale à 1.

b) Si $\alpha > 0$ la fonction φ_α est strictement croissante et on a $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\alpha(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_\alpha(x) = +\infty$.

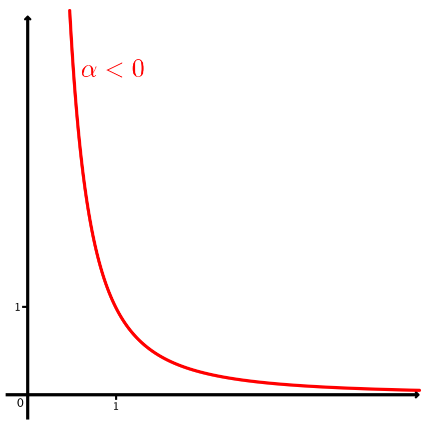
c) Si $\alpha < 0$ la fonction φ_α est strictement décroissante et on a $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\alpha(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_\alpha(x) = 0$.



$\alpha = 0$



$\alpha > 0$



$\alpha < 0$

Remarque – Pour $\alpha = 0$ on a $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_0(x) = 1$ et pour $\alpha > 0$ on a : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\alpha(x) = 0$. On peut donc, dans ces deux cas, prolonger les fonctions φ_0 et φ_α par continuité en 0 en posant :

$$\varphi_0(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour } \alpha > 0 \quad \varphi_\alpha(0) = 0$$

Exercice B15

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$

III.8.6 – Proposition (Croissances comparées généralisées)

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x)\right)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\alpha = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$$

IV – Exercices additionnels

Nous ajoutons ici quelques exercices de calculs de limites. Des méthodes bien plus efficaces (utilisant notamment les ***développements limités***) viendront bien plus tard dans l'année. Mais il est déjà possible de traiter un grand nombre d'exemples.

Méthode B.2

Pour faire une étude de limite on peut :

— utiliser les ***limites usuelles*** déjà rencontrées : croissances comparées (4 limites), d'autres limites à connaître pour ln et exp (3 limite), quelques limites à connaître concernant les fonctions trigonométrique (3 limites);

— procéder à des ***transformations d'expressions*** (du style ajouter/retrancher ou multiplier/diviser) dans l'objectif de se ramener à des limites connues;

— procéder à un ***changement de variable*** dans l'objectif de se ramener à des limites connues;

— faire apparaître (en transformant éventuellement l'expression) le ***taux d'accroissement*** d'une fonction dont on connait la dérivée;

— dans le cas (certes très particulier) où apparait des racines carrés, on peut penser à multiplier et diviser par l'***expression conjuguée***.

Exercice B16

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{2x-1}$

2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x+\frac{1}{x}-2}{x-1}$

3. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

4. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$

5. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

6. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-x$

Fin du chapitre