ECG-1

Chapitre C — Cours et exercices

Calculs de sommes et de produits

Nous continuons dans ce chapitre sur des thématiques essentiellement calculatoires. Il va s'agir ici de calculs de sommes et de produits, en utilisant les symboles usuels $\sum$ et $\prod$. Il y sera notamment question de coefficients binomiaux et de la formule du binôme de Newton (que nous démontrerons). Nous terminerons avec des calculs plus techniques concernant des sommes « doubles », c'est-à-dire faisant intervenir deux indices de sommation.

Sommaire

I – Sommes et produits d'une famille finie de nombres réels

I.1 – Somme d'une famille finie de nombres

I.1.1 – Définition (Le symbole somme $\sum$)

Étant donnée une suite finie u_1, ..., u_n de nombres réels, on note :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \overset{\text{déf}}{=} u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

Remarques

1 ▶ La lettre choisie comme indice n'a pas d'importance (on parle d'***indice muet***) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

2 ▶ On utilise parfois d'autre notations pour présenter une somme, le point essentiel étant que celles-ci doivent indiquer ***sans ambiguïté*** quel sont les nombres qui figurent dans la somme. Par exemple :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n \qquad \sum_{1\leqslant k<4} u_k = u_1 + u_2 + u_3 \qquad \sum_{k\in[\![2,5]\!]} u_k = u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

Exemple – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termes}} = n}$$

I.1.2 – Proposition (Somme des n premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration (celle de Gauss)

B1

I.1.3 – Proposition (Somme des n premiers carrés d'entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration (méthode 1 : par récurrence)

B2

B3

I.1.4 – Proposition (Règles de calcul)

On conserve les notations précédentes.

(i) Changement de l'ordre de sommation ($i = n-k+1$) :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{i=1}^{n} u_{n-i+1}$$

(ii) Décalage d'indice ($i = k+p$) :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{i=1+p}^{n+p} u_{i-p}$$

(iii) Pour deux suites finies $u_1, \cdots, u_n$ et $v_1, \cdots, v_n$ et tout nombre réel λ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k$$

$$\lambda.\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda.u_k)$$

(iv) Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$ on a (relation de Chasles) :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(v) Décomposition suivant la parité des indices :

$$\sum_{k=1}^{2p} u_k = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} u_{2i}}_{\text{somme des termes de rang pair}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} u_{2i-1}}_{\text{somme des termes de rang impair}}$$

$$\sum_{k=1}^{2p+1} u_k = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} u_{2i}}_{\text{somme des termes de rang pair}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p+1} u_{2i-1}}_{\text{somme des termes de rang impair}}$$

(vi) Simplifications ***télescopiques*** :

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

Exercice C1 (Somme des carrés d'entiers, méthode n° 2)

On veut obtenir une expression simplifiée et factorisée de la somme :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

1. Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x) = x^2$.
2. En déduire la valeur de la somme S_n en la transformant en somme ***télescopique***. Vérifier que le résultat est bien celui de la proposition **I.1.3**.

I.1.5 – Proposition (Somme géométrique)

Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Démonstration

B4

Remarque – Certains ont probablement appris une variante de cette formule qui est la suivante :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = u_p + u_{p+1} + \cdots u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

On peut facilement retenir cette formule en constatant que le facteur u_p n'est rien d'autre que le ***premier terme de la somme*** et que l'exposant $n-p+1$ est exactement le ***nombre de termes de cette somme***.

Exercice C2

Soit n un entier naturel pair. En séparant les termes d'indices pairs et impairs, calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1)$$

I.1.6 – Proposition (Factorisation de $a^n \pm b^n$)

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

(ii) Si n est un entier ***impair***, c-à-d $n = 2p+1$ alors on a :

$$a^n + b^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-k-1} b^k$$

Démonstration de *(i)*

B5

Exercice C3

1. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. En déduire une simplification de la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Exercice C4

Soit x un nombre réel différent de 1. Montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2\cdot 3^k}+x^{3^k}+1\right)=\frac{x^{3^{n+1}}-1}{x-1}$$

Exercice C5

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$

Indication – *Transformer en sommes « télescopiques ».*

Exercice C6

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

I.2 – Produit d'une famille finie de nombres

I.2.1 – Définition (Le symbole produit $\prod$)

Étant donnée une suite finie a_1, ..., a_n de nombres réels, on note :

$$\prod_{k=1}^{n}a_k\overset{\text{déf}}{=}a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$$

Remarque – Notations alternatives : mêmes remarques que pour les sommes.

Exemple – Pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\prod_{k=p}^{n}a=\underbrace{a\times\cdots\times a}_{n-p+1\text{ facteurs}}=a^{n-p+1}$.

I.2.2 – Définition

La ***factorielle*** d'un entier $n\in\mathbb{N}$ est définie par :

$$n!\overset{\text{déf}}{=}\begin{cases}1 & \text{si } n=0\\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n}k=1\times\cdots\times n & \text{si } n>0\end{cases}$$

I.2.3 – Proposition (Importante)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$n!=n\times(n-1)!$$

Remarque – Ne pas confondre $n!$ et n^n : $n!=1\times2\times\cdots\times(n-1)\times n$ et $n^n=\underbrace{n\times n\times\cdots\times n\times n}_{n\text{ fois}}$

I.2.4 – Théorème

Si E et F sont deux ensembles à n éléments, le nombre de bijections de E dans F est $n!$.

Exercice C7 (Difficile)

Démontrer le théorème précédent en raisonnant par récurrence sur n.

I.2.5 – Proposition (Rèles de calcul)

On conserve les notations précédentes.

(i) Changement de l'ordre de ($i = n - k + 1$) :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$$

(ii) Décalage d'indice ($i = k + p$) :

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{i=1+p}^{n+p} u_{i-p}$$

(iii) Étant données deux familles de nombres $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ on a :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right) = \prod_{k=1}^{n} (a_k b_k)$$

(iv) Étant donnés une famille de nombres $(a_1, \ldots, a_n)$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\prod_{k=1}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^n \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$$

(v) Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$ on a (relation de Chasles) :

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = \left(\prod_{k=1}^{p} u_k\right) \times \left(\prod_{k=p+1}^{n} u_k\right)$$

(vi) Décomposition suivant la parité des indices :

$$\prod_{k=1}^{2p} u_k = \underbrace{\prod_{i=1}^{p} u_{2i}}_{\text{produit des termes de rang pair}} \times \underbrace{\prod_{i=1}^{p} u_{2i-1}}_{\text{produit des termes de rang impair}}$$

$$\prod_{k=1}^{2p+1} u_k = \underbrace{\prod_{i=1}^{p} u_{2i}}_{\text{produit des termes de rang pair}} \times \underbrace{\prod_{i=1}^{p+1} u_{2i-1}}_{\text{produit des termes de rang impair}}$$

(vii) Simplifications télescopique pour une suite $a_1, \cdots, a_{n+1}$ de nombres réels non nuls :

$$(a) \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$$

$$(b) \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$$

II – Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

II.1 – Coefficients binomiaux

II.1.1 – Définition (Coefficients binomiaux)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on appelle coefficient binomial « k parmi n », noté $\binom{n}{k}$ le nombre défini par :

$$\binom{n}{k} \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II.1.2 – Proposition (Quelques valeurs particulières à connaitre PARFAITEMENT)

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\dbinom{n}{0} = 1$

(ii) Pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\dbinom{n}{1} = n$

(iii) Pour tout $n \geqslant 2$ on a : $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

II.1.3 – Proposition

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Remarque – Cette version est plus pratique pour faire du ***calcul numérique*** car la fraction est davantage simplifiée.

Démonstration

B6

II.1.4 – Proposition (Règles de calculs)

(i) **Symétrie –** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(ii) **Formule de Pascal –** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

(iii) Le nombre $\dbinom{n}{k}$ est toujours un entier.

Exercice C8 (Facile)

Démontrer la proposition précédente en utilisant la définition avec factorielles.

Remarque – Les coefficients binomiaux peuvent se visualiser dans le triangle de Pascal (qui se construit à l'aide de la formule de Pascal) :

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Ce triangle se remplit à l'aide de la formule de Pascal que l'on peut schématiser par :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & + & \bullet \\ & & \parallel \\ & & \bullet \end{array}$$

II.2 – Autres visions des coefficients binomiaux

II.2.1 – Cohérence avec la définition probabiliste vue au lycée

Au lycée, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ a été défini comme le nombre de chemins réalisant exactement k succès dans l'arbre représentant n répétitions (indépendantes) d'une épreuve suivant une loi de Bernoulli.

Il a été en outre démontré que ces coefficients binomiaux « version probabiliste », avaient les mêmes valeurs particulières et vérifiez la même relation de récurrence (formule de Pascal). Il en résultat qu'il s'agit ***exactement des mêmes coefficients***.

II.2.2 – Proposition (Vision ensembliste des coefficients binomiaux)

Soit E un ensemble à n éléments. Alors le nombre de parties (ou sous-ensembles) de E ayant exactement k éléments vaut $\binom{n}{k}$.

Démonstration

B7

II.3 – Formule du binôme de Newton

II.3.1 – Théorème (Formule du binôme de Newton)

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Remarque – La deuxième formule s'obtient en échangeant le rôle de a et b, ce qui est faisable car $a+b=b+a$ (commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$).

Démonstration

B8

B8

Exemples

1 ▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a = b = 1$ on obtient la formule :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Remarque – Il s'agit de la somme des éléments de la n-ième ligne du triangle de Pascal.

2 ▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a de même :

$$(1-1)^n = 0^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Exercice C9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ démontrer que :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

2. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

Exercice C10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\mathrm{A}_n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \qquad \mathrm{B}_n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$$

Calculer $\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n$ et $\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n$. En déduire la valeur de A_n et B_n.

Exercice C11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0$ pour $n \geqslant 2$.

2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$

Indication – *On pourra écrire la fonction $x \mapsto (1-x)^n$ de deux façons différentes, la dériver ou la primitiver, puis considérer une valeur particulière de x.*

III – Sommes doubles

III.1 – Sommes « rectangulaires »

III.1.1 – Somme des éléments d'un tableau (rectangulaire)

Considérons un tableau de nombres réels avec par exemple 3 lignes et 4 colonnes

$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$u_{1,4}$
$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$u_{2,4}$
$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$u_{3,3}$	$u_{3,4}$

On numérote ces nombres de telles sortes que $u_{i,j}$ soit le nombre situé à la ligne i et colonne j.

On dispose donc d'une ***famille*** de nombres réels notée $(u_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$, ***indexée*** par 2 indices, le premier variant entre 1 et 3 et le second entre 1 et 4.

On désire calculer la somme S de tous les éléments de ce tableau. Pour cela on peut adopter deux stratégies :

— soit faire la somme de chaque ligne, puis ajouter tous les résultats obtenus ;

— soit faire la somme de chaque colonne, puis ajouter tous les résultats obtenus.

Évidemment on obtient le même résultat quelque soit la méthode retenue.

Dans le premier cas on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= (u_{1,1}+u_{1,2}+u_{1,3}+u_{1,4}) + (u_{2,1}+u_{2,2}+u_{2,3}+u_{2,4}) + (u_{3,1}+u_{3,2}+u_{3,3}+u_{3,4}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{4} u_{1,j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{4} u_{2,j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{4} u_{3,j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4} u_{i,j}\right) \end{aligned}$$

et dans le second :

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= (u_{1,1}+u_{2,1}+u_{3,1}) + (u_{1,2}+u_{2,2}+u_{3,2}) + (u_{1,3}+u_{2,3}+u_{3,3}) + (u_{1,4}+u_{2,4}+u_{3,4}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{3} u_{i,1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{3} u_{i,2}\right) + \left(\sum_{i=1}^{3} u_{i,3}\right) + \left(\sum_{i=1}^{3} u_{i,4}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{3} u_{i,j}\right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{3} u_{i,j}\right),$$

Autrement dit on peut ***intervertir*** les deux symboles de sommation.

Exemple – Considérons par exemple le tableau à 2 lignes et 3 colonnes suivant

1	5	−1
4	8	−3

Par la première méthode on obtient : $(1+5-1)+(4+8-3)=14$.
Par la seconde on trouve : $(1+4)+(5+8)+(-1-3)=14$.

Plus généralement on a le résultat suivant.

III.1.2 – Proposition (Interversion de deux symboles de sommation)

Soit $(u_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille de nombres réels indexée par 2 indices, le premier variant entre 1 et n et le second entre 1 et p. Alors

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}u_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{i,j}\right).$$

On note souvent cette somme de la manière suivante : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}u_{i,j}$.

Exercice C12

Calculer la somme $\mathrm{S}=\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}(i+j)$.

Exercice C13

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer les expressions suivantes :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)\qquad \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{i}{j}\qquad \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij\qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}k^{i+j}$$

III.2 – Sommes « triangulaires »

III.2.1 – Présentation

On souhaite comme précédemment calculer la somme S des élements d'un tableau. Mais nous nous intéressons cette fois à un tableau ***partiellement rempli*** de forme triangulaire :

$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$u_{1,4}$
	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$u_{2,4}$
		$u_{3,3}$	$u_{3,4}$
			$u_{4,4}$

Dans ce tableau, seules les cases situées au dessus (au sens large) de la diagonale sont remplies. Autrement dit la case située à la ligne i et colonne j est remplie si et seulement si $i\leqslant j$. On a donc une famille de nombres réels que l'on note $(u_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4}$.

Nous pouvons comme précédemment adopter deux stratégies : sommer par lignes ou par colonnes.

Dans le premier cas on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}&=(u_{1,1}+u_{1,2}+u_{1,3}+u_{1,4})+(u_{2,2}+u_{2,3}+u_{2,4})+(u_{3,3}+u_{3,4})+(u_{4,4})\\&=\left(\sum_{j=1}^{4}u_{1,j}\right)+\left(\sum_{j=2}^{4}u_{2,j}\right)+\left(\sum_{j=3}^{4}u_{3,j}\right)+\left(\sum_{j=4}^{4}u_{4,j}\right)\\&=\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=i}^{4}u_{i,j}\right)\end{aligned}$$

et dans le second :

$$\begin{aligned}
S &= (u_{1,1}) + (u_{1,2} + u_{2,2}) + (u_{1,3} + u_{2,3} + u_{3,3}) + (u_{1,4} + u_{2,4} + u_{3,4} + u_{4,4}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{1} u_{i,1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{2} u_{i,2}\right) + \left(\sum_{i=1}^{3} u_{i,3}\right) + \left(\sum_{i=1}^{4} u_{i,4}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=i}^{4} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right)$$

Autrement dit on peut ***intervertir*** les deux symboles de sommation, à condition de faire ***attention*** aux intervalles dans lesquels varient les indices.

Plus généralement on a le résultat suivant.

III.2.2 – Proposition (Interversion dans une somme double « triangulaire »)

Soit $(u_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille de nombres réels indexée par 2 indices i et j variant entre 1 et n avec $i \leqslant j$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right)$$

Remarques

1 ▶ On note souvent cette somme de la manière suivante :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} u_{i,j}$$

2 ▶ Pour réaliser une interversion dans une telle somme double il certainement utile d'écrire la chose suivante :

$$\begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant n \\ \quad \text{ET} \\ i \leqslant j \leqslant n \end{cases} \iff 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \iff \begin{cases} 1 \leqslant j \leqslant n \\ \quad \text{ET} \\ 1 \leqslant i \leqslant j \end{cases}$$

Exercice C14

Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{1+j}\right)$.

Remarque – Il existe plusieurs variantes de sommes doubles « triangulaires ». Par exemple :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_{i,j}$$

représente la somme des éléments d'un tableau dont seules les cases situées strictement au dessus de la diagonale sont remplies. Ou encore :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} u_{i,j}$$

qui représente la somme des éléments d'un tableau dont seules les cases situées au dessous (au sens large) de la diagonale sont remplies.

Exercice C15

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les expressions suivantes :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{i} \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j)$$

IV – Exercices additionnels

Exercice C16 (Sommes géométriques « dérivées »)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on note :

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Rappeler (sans démonstration) l'expression simplifiée de $\mathrm{S}(x)$.

2. En dérivant la fonction S sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, en déduire une expression simplifiée de la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

3. En dérivant une deuxième fois, en déduire une expression simplifiée de la somme suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$$

Fin du chapitre