ECG-1

Chapitre

D

Cours et exercices

Ensembles et applications

Nous revenons dans ce chapitre sur des considérations plus théoriques concernant les ensembles et les applications. Nous verrons notamment les opérations ensemblistes classiques. Concernant les applications, nous traiterons les notions de fonctions injectives et surjectives.

Sommaire

I – Ensembles

I.1 – Généralités sur les ensembles

I.1.1 – Notion d'ensemble

Dans le système axiomatique le plus couramment employé en mathématiques (théorie **ZFC** pour **Z**ermolo, **F**raenkel et axiome du ***choix***), la notion d'ensemble n'est pas défini au sens strict du terme. Disons plutôt que c'est une ***notion première*** qui obéit à un certain nombre d'***axiomes***. La présentation de ces axiomes dépasse le cadre de notre programme même si certains d'entre eux ne font que formaliser des pratiques qui nous sont familières.

Exemples

1 ▶ Si E est un ensemble constitué d'un seul élément x on dit que E est un ***singleton*** et on note $E = \{x\}$.

2 ▶ Si E est un ensemble constitué de deux éléments x et y on dit que E est une ***paire*** et on note $E = \{x, y\}$.

Remarques

1 ▶ Une des choses que clarifient l'axiomatique est la notion d'***appartenance***. En ce qui nous concerne, nous en resterons à une vision intuitive : x ***appartient*** à E (ce que l'on note $x \in E$) signifie que x est un des ***éléments*** de E.
Remarque dans la remarque - La phrase précédente frise l'escroquerie intellectuelle car, à vrai dire, que signifie « être un élément de E » ? On vous avais prévenu : on en reste à une vision intuitive.

2 ▶ Autre point que clarifie l'axiomatique : l'***égalité entre ensemble***. En substance, deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

3 ▶ Un autre de ces axiomes affirme l'existence d'un ***ensemble vide*** : celui-ci est caractérisé par le fait qu'il ne contient aucun élément. Et celui-ci est d'ailleurs unique et est noté $\varnothing$.

CC BY NC SA

4 ▶ Dans cette axiomatique, tous les objets sont des ensembles. Oui, oui, ***tous*** les objets. Y compris les nombres. Par exemple, une des définitions formelles (pas du tout utile à notre niveau) des entiers naturels est la suivante :

$$\begin{aligned}
0 &\overset{\text{déf}}{=} \varnothing \\
1 &\overset{\text{déf}}{=} \{\varnothing\} \\
2 &\overset{\text{déf}}{=} \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &\overset{\text{déf}}{=} \big\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\big\} \\
4 &\overset{\text{déf}}{=} \Big\{\varnothing, \big\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\big\}\Big\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

I.1.2 – Mode de description d'un ensemble

Il y a plusieurs moyens pour décrire un ensemble (dans ce contexte, décrire un ensemble signifie être capable de dire précisément quels sont ses éléments).

- On peut décrire un ensemble ***en extension*** en donnant la liste de ses éléments :

$$\mathrm{E} = \{a, b, c, d\} \quad \mathrm{F} = \{1, 2, 3\}$$

- On peut également décrire un ensemble ***en compréhension*** c'est à dire qu'on le définit par une propriété caractéristique parmi les éléments d'un ensemble donné. L'ensemble des réels dont le carré vaut 4 se note par exemple :

$$\mathrm{E} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4\right\}$$

  Bien entendu il s'agit dans ce cas de la ***paire*** $\{-2, 2\}$.
- On peut aussi décrire un ensemble comme ***l'ensemble des images par une fonction*** (voir ci-après). Par exemple :

$$\mathrm{E} = \left\{k^2,\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

  désigne l'ensemble des carrés parfaits c'est à dire l'ensemble des images des entiers naturels par la fonction carré.

I.2 – Produit cartésien d'ensembles

I.2.1 – Définition

Produit cartésien de deux ensembles Étant donné deux ensembles E et F, on appelle ***produit cartésien*** de E et F l'ensemble $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ constitué des ***couples*** (x, y) où $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$.

Exemple – Si $\mathrm{E} = \{1, 2\}$ et $\mathrm{F} = \{a, b, c\}$ on a :

$$\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Remarque – Par définition il est donc équivalent d'écrire « $\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{F}$ » et « $\forall (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ ».

I.2.2 – Définition

Généralisation Étant donné des ensembles $\mathrm{E}_1, \cdots, \mathrm{E}_n$, on appelle ***produit cartésien*** de $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ l'ensemble $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ constitué des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in \mathrm{E}_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}_n$.

Dans le cas où $\mathrm{E}_1 = \cdots = \mathrm{E}_n = \mathrm{E}$ on note ce produit E^n.

CC BY NC SA

I.3 – Sous-ensembles (ou parties)

I.3.1 – Définition (Sous-ensemble)

Si E et F sont deux ensembles, on dit que E est ***inclus*** dans F (ou que E est un ***sous-ensemble*** ou une ***partie*** de F) et on note $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Formellement cela s'écrit :

$$E \subset F \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in E,\ x \in F$$

Exemples

1 ▶ Si $E = \{a, b, c\}$ alors $F = \{a\}$ et $G = \{a, c\}$ sont des sous-ensembles de E.

2 ▶ On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

3 ▶ Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, que $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et que $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, alors on a : $\mathscr{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$.
L'inclusion réciproque est fausse car la fonction valeur absolue est continue mais non dérivable (en 0).

I.3.2 – Définition (Ensemble des parties d'un ensemble)

Si E est un ensemble donné, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E.

Exemple – Si $E = \{a, b, c\}$ on a :

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\Big\}$$

Exercice D1

On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_0 &= \varnothing \\ E_1 &= \{a\} \\ E_2 &= \{a, b\} \\ E_3 &= \{a, b, c\} \\ E_4 &= \{a, b, c, d\} \end{aligned}$$

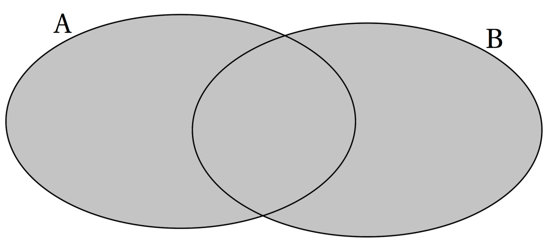
1. Écrire explicitement les ensembles $\mathscr{P}(E_k)$ pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$.
2. Pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, donner le cardinal (***i.e.*** le nombre d'éléments) de $\mathscr{P}(E_k)$.
3. Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant le cardinal de $\mathscr{P}(E)$, si E est de cardinal n ?
4. Démontrer cette conjecture à l'aide de la proposition **II.2.2** page **9** et de l'exemple **1** page **10** du chapitre **C**.

I.4 – Opérations sur les parties d'un ensemble

L'ensemble E étant fixé, on peut définir sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E des ***opérations ensemblistes***.

I.4.1 – Définition (Réunion de deux parties)

Pour tout $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^2$ la ***réunion*** de A et B est définie par : $A \cup B \overset{\text{déf}}{=} \big\{x \in E, (x \in A \text{ OU } x \in B)\big\}$.

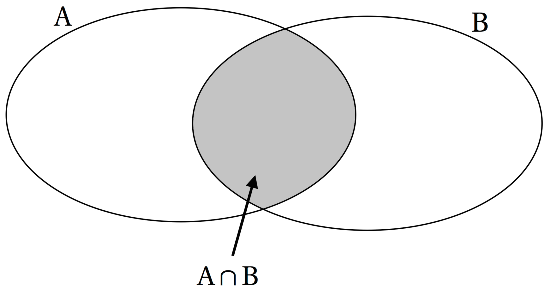


$A \cup B$

CC BY NC SA

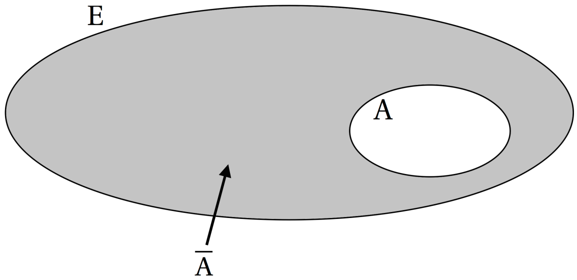
I.4.2 – Définition (Intersection de deux parties)

Pour tout $(A,B) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2$ l'***intersection*** de A et B est définie par : $A \cap B \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E, (x \in A \text{ ET } x \in B)\}$.



I.4.3 – Définition (Complémentaire d'une partie)

Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$ le ***complémentaire*** de A dans E est définie par : $\{x \in E,\ x \notin A\}$. Celui-ci est noté $\complement_E^A$, $\overline{A}$ ou $E \setminus A$.



Exercice D2

Soit E un ensemble fixé. Pour tout $(A,B,C) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^3$ démontrer que :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **2.** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Indication – *On pourra traduire les énoncés ensemblistes sous forme de propositions logiques et utiliser des tables de vérité.*

Exercice D3

Soit E un ensemble fixé. Pour tout $(A,B) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2$ démontrer que :

1. $A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$ **2.** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **3.** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Indication – *On pourra traduire les énoncés ensemblistes sous forme de propositions logiques et utiliser des tables de vérité.*

II – Applications (ou fonctions)

II.1 – Rappels

Voici un résumé de ce que nous savons déjà à propos des fonctions (on se limite aux généralités et on écarte ici tout ce qui est spécifique aux fonctions réelles de la variable réelle).

- Si E et F sont deux ensembles, une ***fonction*** (ou ***application***) f de E dans F est un moyen d'***associer*** à chaque élément x de E un unique élément de F appelé son ***image*** par f et qui est noté $f(x)$.
  On dit que E est l'***ensemble de départ*** de f (ou son ***ensemble de définition***), que F est son ***ensemble d'arrivée*** et on résume souvent cela par la notation $f : E \to F$.
  Exemples
  – Si E est un ensemble, l'***application identité*** de E est l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$ définie par :
  $$\forall x \in E,\ \mathrm{Id}_E(x) = x$$
  – Si A est une partie d'un ensemble E, ***l'indicatrice de*** A est l'application $\mathbb{1}_A$ définie par :
  $$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \overline{A} = E \setminus A \end{cases}$$

CC BY NC SA

- Si f est une fonction de E dans F et que A est une partie (ou sous-ensemble) de E, on appelle ***restriction*** de f à A la fonction :

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- À toute fonction $f : E \to F$ est associée son ***graphe***, qui est un sous-ensemble de $E \times F$:

$$\mathscr{C}_f = \Big\{\big(x, f(x)\big), x \in E\Big\}$$

- Si $f : E \to F$ et $y \in F$, on appelle ***antécédent de*** y ***par*** f tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
- Si $f : E \to F$ et $A \subset E$ on appelle ***image de*** A ***par*** f la partie de F suivante :

$$f(A) \overset{\text{déf}}{=} \Big\{f(x) \ / \ x \in A\Big\}$$

Ainsi, $f(A)$ est constitué des images de tous les éléments de A.

- Si $f : E \to F$ et $B \subset F$ on appelle ***tiré en arrière*** de B par f la partie de E suivante :

$$f^{\leftarrow}(B) \overset{\text{déf}}{=} \Big\{x \in E \ / \ f(x) \in B\Big\}$$

Ainsi, $f^{\leftarrow}(B)$ est constitué des antécédents de tous les éléments de B.

> **Remarque –** La notation officielle pour $f^{\leftarrow}(B)$ est $f^{-1}(B)$ et le vocabulaire n'est pas « tiré en arrière de B par f » mais « ***image réciproque de B par*** f ». La notation et le vocabulaire officiel sont, d'expérience, une source de confusions et d'erreurs ***absolument désastreuses***. Le problème de la notation et du vocabulaire officiel est qu'il ***peut laisser penser à tort*** que f est une bijection (dont la réciproque est naturellement notée f^{-1}). Pourtant, cette définition de $f^{-1}(B)$ est tout à fait valide pour une fonction non bijective.

- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$, la ***composée*** de f et de g est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :

$$\forall x \in E, \ g \circ f(x) \overset{\text{déf}}{=} g\big(f(x)\big)$$

- On dit que $f : E \to F$ est ***bijective*** si tout élément de F possède un unique antécédent par c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \ \exists! x \in E, \ f(x) = y$$

- La ***réciproque*** d'une bijection $f : E \to F$ est l'application $f^{-1} : F \to E$ définie par :

$$\forall y \in F, \ f^{-1}(y) \overset{\text{déf}}{=} \text{« l'unique antécédent de } y \text{ par } f \text{ »}$$

- Si $f : E \to F$ est bijective alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, f^{-1} est également bijective et on a : $\big(f^{-1}\big)^{-1} = f$.
- Si $f : E \to F$ et qu'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

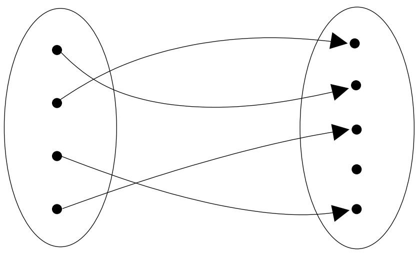
II.2 – Fonctions injectives et surjectives

II.2.1 – Définition (Fonction *injective* (ou *injection*))

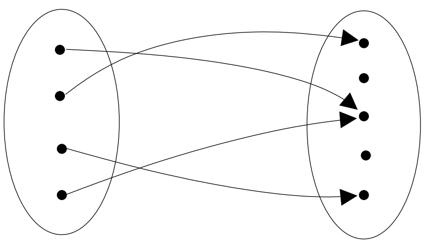
> On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est ***injective*** (ou que c'est une ***injection***) si tout élément de F possède ***au plus*** un antécédent par f. Autrement dit chaque élément de F est atteint ***au plus*** une fois par la fonction.

Remarques

1 ▶ Si E et F sont des ensembles finis, cela signifie graphiquement qu'aucun éléments de F n'est atteint par plusieurs flèches.



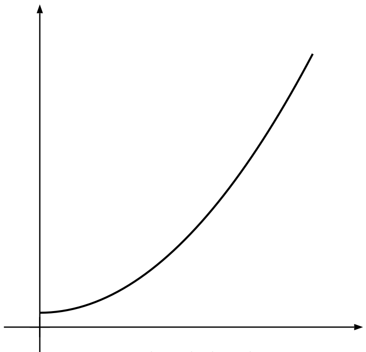
Fonction injective



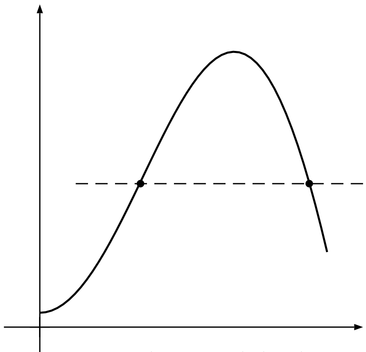
Fonction non–injective

CC BY NC SA

2 ▶ Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela signifie graphiquement qu'il est impossible de trouver deux points du graphe de f à la même hauteur.



Fonction injective



Fonction non-injective

3 ▶ La définition est équivalente à dire que deux éléments différents de E ont toujours des images différentes. Ou encore que deux éléments ayant la même image sont nécessairement égaux. En langage mathématique cela s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

4 ▶ En général, pour justifier qu'une fonction f est injective, on considère deux éléments ayant la même image et on ***démontre*** qu'ils sont égaux (par exemple par un calcul).

5 ▶ Si f est une ***application linéaire***, il suffit de démontrer que son noyau est réduit à $\{0\}$ (voir plus tard).

6 ▶ Une fonction strictement monotone est automatiquement injective.

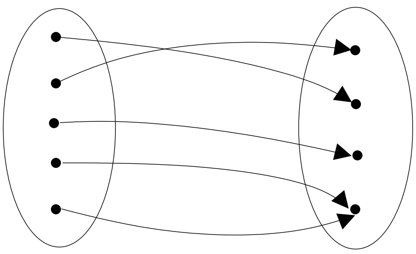
II.2.2 – Définition (Fonction *surjective* (ou *surjection*))

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est ***surjective*** (ou que c'est une ***surjection***) si tout élément de F possède ***au moins*** un antécédent par f. Autrement dit chaque élément de F est atteint ***au moins*** une fois par la fonction. En langage mathématiques cela s'écrit :

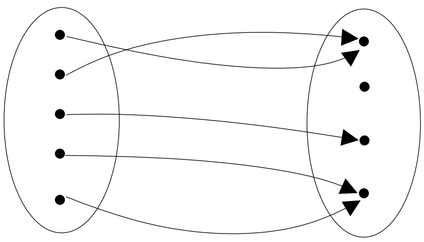
$$\forall y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{E},\ y = f(x)$$

Remarques

1 ▶ Si E et F sont des ensembles finis, cela signifie graphiquement que chaque élément de F est atteint au moins par une flèche.

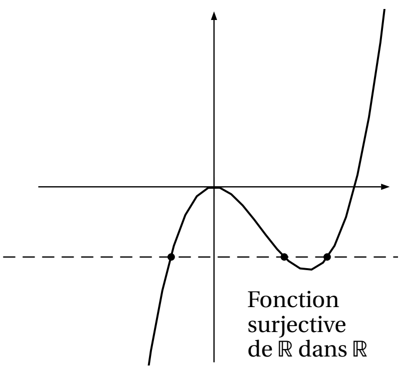


Fonction surjective

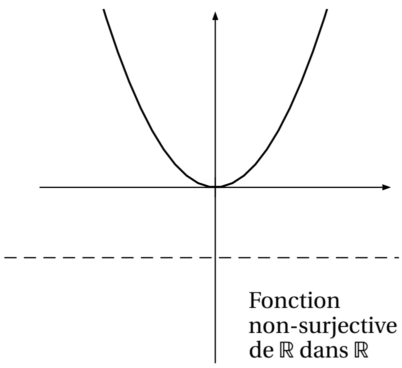


Fonction non–surjective

2 ▶ Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela signifie graphiquement que toutes les droites horizontales dont l'ordonnée est dans F coupent la courbe au moins une fois.



Fonction surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



Fonction non-surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

3 ▶ On peut toujours transformer une fonction non-surjective en une fonction surjective en modifiant l'espace d'arrivée. Il suffit en effet de limiter l'espace d'arrivée aux valeurs effectivement atteintes par la fonction. Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective si l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ mais elle le devient si l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}_+$.

4 ▶ Si une fonction est continue, il est possible de justifier sa surjectivité à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires (attention de bien donner tous les détails).

II.2.3 – Proposition (Lien entre injectivité, surjectivité et bijectivité)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction. On a toujours l'équivalence suivante :

$$f \text{ est bijective} \iff \big(f \text{ est injective}\big) \text{ ET } \big(f \text{ est surjective}\big)$$

Remarque – Pour démontrer qu'une fonction est bijective, il est assez fréquent (surtout en algèbre) de démontrer séparément qu'elle est injective et surjective.

Méthode D.1

La liste de méthodes ci-après n'est pas exhaustive (complète). Mais celles-ci sont utilisables « assez souvent ».

1. Pour démontrer l'injectivité de $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ on considère deux éléments (quelconques) x et y de E ayant la même image ***i.e.*** $f(x) = f(y)$. Et on démontre par un calcul ou raisonnement que $x = y$.
2. Pour démontrer la non-injectivité de f, il suffit de trouver x_0 et y_0 tel que $x_0 \neq y_0$ et $f(x_0) = f(y_0)$.
3. Pour démontrer la surjectivité de $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ on considère un élément quelconque $z \in \mathrm{F}$ et on démontrer par un calcul ou un raisonnement que z possède un moins un antécédent. Ce type de démonstration revient souvent à résoudre une équation (ou un système d'équations, *etc.*).
4. Pour démontrer que f n'est pas surjective, il suffit de mettre en évidence un élément $z_0 \in \mathrm{F}$ n'ayant aucun antécédent par f (autre manière de dire : f n'atteint jamais la valeur z_0).

Exercice D4

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : (x, y) \longmapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$;
2. $g : (x, y) \longmapsto (1, x - y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$;
3. $h : (x, y) \longmapsto (2x + y, 3x - 2y)$.

Exercice D5

Soit E, F et G trois ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux fonctions.

1. Si f et g sont injectives, montrer que leur composée $g \circ f$ l'est aussi.
2. Si f et g sont surjectives, montrer que leur composée $g \circ f$ l'est aussi.
3. Si f et g sont bijectives, montrer que leur composée $g \circ f$ l'est aussi. Exprimer dans ce cas la réciproque de $g \circ f$ en fonction des réciproques de f et de g.

III – Exercices additionnels

Méthode D.2

Soit E et F deux ensembles.

- **Inclusion**
  Pour montrer que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$, on considère un élément quelconque de E, ***on lui donne un nom*** (sinon comment le manipuler !?) et on démontre qu'il appartient à F.
- **Non inclusion**
  Pour démontrer que $\mathrm{E} \not\subset \mathrm{F}$ il suffit de trouver un élément $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $x_0 \notin \mathrm{F}$.
- **Égalité**
  Pour démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on démontre souvent séparément $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ (raisonnement par ***double inclusion***).

BY NC SA

Exercice D6

Soit E et F deux ensembles fixés, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \left(\mathscr{P}(\mathrm{E})\right)^2$.

1. Démontrer que : $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies f(\mathrm{A}) \subset f(\mathrm{B})$.

2. Démontrer que : $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$.

3. Démontrer que : $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.

4. Donner un exemple pour lequel l'inclusion de la question précédente est stricte (***i.e.*** n'est pas une égalité).

Exercice D7

Soit E et F deux ensembles fixés, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \left(\mathscr{P}(\mathrm{F})\right)^2$.

1. Démontrer que : $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies f^{\leftarrow}(\mathrm{A}) \subset f^{-1}(\mathrm{B})$.

2. Démontrer que : $f^{\leftarrow}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f^{\leftarrow}(\mathrm{A}) \cup f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$.

3. Démontrer que : $f^{\leftarrow}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f^{\leftarrow}(\mathrm{A}) \cap f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$.

ATTENTION

Bien se souvenir que nous avons introduit, ***par précaution***, la notation $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$ en appelant cet ensemble le tiré en arrière de B par f. Mais la notation classique est $f^{-1}(\mathrm{B})$ et cet ensemble s'appelle image réciproque de B par f. La problème de la notation classique est qu'elle peut laisser penser que f est bijective ce qui n'est absolument pas garantie.

Méthode D.3

Par définition deux fonctions f et g sont égales si :

- elles ont le même ensemble de départ (que l'on notera X) ;
- elles ont le même ensemble d'arrivée (que l'on notera Y) ;
- elles « coïncident » en tout point de X ***i.e.*** : $\forall x \in \mathrm{X},\ f(x) = g(x)$

En pratique, pour montrer que deux fonctions f et g sont égales, on considère donc un élément quelconque de X, ***on lui donne un nom***, par exemple x, et on démontre (par un calcul ou un raisonnement) que $f(x) = g(x)$.

Exercice D8

Soit E un ensemble non vide. On rappelle que pour toute partie A de E, l'indicatrice de A est la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_{\mathrm{A}} : & \mathrm{E} & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{si } x \in \overline{\mathrm{A}} \end{cases} \end{array}$$

Pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \left(\mathscr{P}(\mathrm{E})\right)^2$ démontrer que :

(i) $\mathbb{1}_{\overline{\mathrm{A}}} = 1 - \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$;

(ii) $\mathbb{1}_{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \times \mathbb{1}_{\mathrm{B}}$;

(iii) $\mathbb{1}_{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}} + \mathbb{1}_{\mathrm{B}} - \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \times \mathbb{1}_{\mathrm{B}}$.

Indication – *En plus des méthodes précédemment introduites, on pourra raisonner par disjonction de cas.*

Fin du chapitre

CC BY NC SA