Chapitre F

Cours et exercices

# Suites numériques

Ce chapitre est tout d'abord l'occasion de consolider les connaissances acquises au lycée sur les suites réelles. Nous approfondirons ensuite ce thème en introduisant de nouveaux théorèmes de convergences et en effectuant des comparaisons asymptotiques entre les différentes suites usuelles.

## Sommaire



## I – Généralités

### I.1 – Rappels et compléments

#### I.1.1 – « À partir d'un certain rang »

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. On dit que $\mathscr{P}(n)$ est vraie ***à partir d'un certain rang*** (***àpdcr***) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour tous les entiers $n \geqslant n_0$.

Par exemple $\mathscr{P} =$ « $n^2 > 30$ » est vraie à partir d'un certain rang (ce rang est d'ailleurs $n_0 = 6$).

#### I.1.2 – Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle ***droite numérique achevée*** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

- **Ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$**

  L'ordre naturel sur $\mathbb{R}$ se prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ en convenant que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x < +\infty \quad$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ -\infty < x$.

- **Opérations algébriques dans $\overline{\mathbb{R}}$**

  Les opérations usuelles de $\mathbb{R}$ se prolongent de manière ***partielle*** à $\overline{\mathbb{R}}$.
  Il est par exemple naturel de définir $1 + (+\infty) = +\infty$.
  En revanche il n'y a pas de valeur naturelle pour $(+\infty) + (-\infty)$ (***forme indéterminée***).
  Nous reviendrons sur ce point quand nous parlerons d'***opérations sur les limites***.

### I.1.3 – Notion de suite

Une ***suite réelle*** est une application $u : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ où A est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Généralement on a $\mathrm{A} = \mathbb{N}$. On rencontre aussi des suite définies sur $\mathrm{A} = \mathbb{N}^*$ ou $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geqslant n_0\}$. La plupart des résultats seront énoncés avec $\mathrm{A} = \mathbb{N}$.

On note alors $u = (u_n)$ pour désigner cette suite ou bien (suivant le cas) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

On dit aussi que $u_n$ est le ***terme général*** de la suite $u$.

### I.1.4 – Mode de définition d'une suite

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- soit on donne une formule ***explicite*** donnant $u_n$ en fonction de $n$ ;
- soit on donne un on plusieurs des premiers termes de la suite ainsi qu'une ***relation de récurrence*** ;
- soit on définie $u_n$ comme l'unique solution à une équation donnée (définition ***implicite***).

#### Exemples

1 ▶ La suite $u$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 1$ peut s'écrire $(n^2-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 ▶ La suite $u$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}$ peut s'écrire $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3 ▶ On a déjà rencontré la suite $u$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$ qui est en fait la suite $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4 ▶ On a déjà rencontré la suite $u$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ qui est en fait la suite $\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5 ▶ Si $q \neq 1$, la suite $u$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ n'est rien d'autre que la suite $\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

### I.1.5 – Opérations sur les suites

Soit $u, v$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme des suites $u$ et $v$ la suite $s$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = u_n + v_n$. On la note $u + v$.
- On peut définir de même $u - v$ et $uv$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$ on appelle quotient des suites $u$ et $v$ la suite $q$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. On la note $\dfrac{u}{v}$.

### I.1.6 – Propriétés éventuelles d'une suite

| **On dit que le suite $u$ est** | **si** |
|---|---|
| majorée | |
| minorée | |
| bornée | |
| constante | |
| constante (bis) | |
| stationnaire | |
| croissante | |
| croissante (bis) | |
| décroissante | |
| décroissante (bis) | |
| monotone | |
| strictement croissante | |
| strictement croissante (bis) | |
| strictement décroissante | |
| strictement décroissante (bis) | |
| strictement monotone | |

**Remarques**

1 ▶ La suite $u$ est bornée si et seulement si $\exists \mathrm{K} \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, -\mathrm{K} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{K}$, autrement dit si et seulement si la suite $|u|$ est majorée.

2 ▶ Une suite est majorée (resp. minorée, bornée) si et seulement si elle l'est àpdcr. En effet si $u$ est majorée par M à partir du rang $n_0$ alors $\max(\mathrm{M}, u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1})$ est un majorant de $u$.

**Exemples**

1 ▶ Soit $u$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Étudions son éventuelle monotonie.

Pour tout $n \geqslant 1$ on a :

B1

2 ▶ Soit $v$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $b_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Étudions son éventuelle monotonie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a alors :

B2

3 ▶ La suite $w$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

## I.2 – Limite

### I.2.1 – Définition (Limite finie)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $\ell$ un nombre réel. On dit que la suite $u$ ***admet*** $\ell \in \mathbb{R}$ ***pour limite*** ou encore qu'elle ***converge vers*** $\ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

On écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

**Remarques**

1 ▶ La condition $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ peut s'écrire de manière équivalente :

B3

**2 ▶** Graphiquement, la définition signifie que tout intervalle centré sur $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

B4

**Exemple –** La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il suffit en effet de prendre $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.
Ensuite :

B5

### I.2.2 – Proposition (Unicité de la limite)

Si $u$ a pour limite $\ell$ et $\ell'$ alors $\ell = \ell'$. Autrement dit la limite (si elle existe) est unique.

### Démonstration

Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$ et par exemple que $\ell < \ell'$.

B6

### I.2.3 – Définition

On dit qu'une suite $u$ est ***convergente*** si elle admet une limite finie. Celle-ci étant unique on peut alors parler de ***la*** limite de $u$ et on écrit alors :

$$\ell = \lim u = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Une suite non convergente est dite ***divergente***.

**Exemples**

1 ▶ Une suite constante est bien sûr convergente.

2 ▶ On vient de voir que $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3 ▶ La suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n$ n'est pas convergente. Démontrons le par l'absurde.

B7

**Remarques**

1 ▶ Une conséquence directe de la définition est que $(u_n)$ converge vers $\ell$ si et seulement si $(u_n-\ell)$ converge vers 0.

2 ▶ Il est clair également que $(u_n)$ converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ converge vers 0 $\big($car $u_n\in[-\varepsilon,+\varepsilon]$ si et seulement si $|u_n|\in[-\varepsilon,+\varepsilon]\big)$.

On en déduit par exemple que la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.

3 ▶ Si $u$ et $v$ coïncident à partir d'un certain rang alors $u$ converge si et seulement si $v$ converge et dans ce cas la limite est la même. Autrement dit la notion de limite ne dépend pas des premiers termes d'une suite.

### I.2.4 – Définition (Limite infinie)

***(i)*** On dit que $u$ a pour limite $+\infty$ ou encore que $u$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ A\leqslant u_n$$

On écrit alors $\lim u=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ ou bien $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

***(ii)*** On dit que $u$ a pour limite $-\infty$ ou encore que $u$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ u_n\leqslant A$$

On écrit alors $\lim u=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ ou bien $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$.

**Exemple –** La suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n$ tend vers $+\infty$. En effet pour $A\in\mathbb{R}$ il suffit de choisir $n_0=\lfloor A\rfloor+1$. Ensuite :

B8

**Remarques**

1 ▶ Attention au vocabulaire, une suite qui tend vers $\pm\infty$ est divergente.

2 ▶ On dira qu'une suite possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ si elle converge ou bien tend vers $\pm\infty$.

### I.2.5 – Proposition (Limite d'une suite géométrique)

Soit $q \in \mathbb{R}$ et $u$ la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.

***(i)*** Si $q > 1$ alors $\lim u = +\infty$.

***(ii)*** Si $q = 1$ alors $\lim u = 1$.

***(iii)*** Si $-1 < q < 1$ alors $\lim u = 0$.

***(iv)*** Si $q \leqslant -1$ alors $u$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

### Démonstration (sauf pour le cas où $q < -1$)

B9

## I.3 – Propriétés élémentaires des suites convergentes

### I.3.1 – Proposition

***(i)*** Soit $a, \ell, c$ trois réels vérifiant $a < \ell < b$ et $u$ une suite qui converge vers $\ell$. Alors on a $a < u_n < b$ à partir d'un certain rang.

***(ii)*** Une suite convergente est bornée.

***(iii)*** Si $u$ est une suite qui converge vers $\ell \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ et reste de signe constant à partir d'un certain rang.

### Démonstration

B10

B10

### I.3.2 – Proposition

***(i)*** Une suite divergente de limite $+\infty$ est toujours minorée.

***(ii)*** Une suite divergente de limite $-\infty$ est toujours majorée.

### I.3.3 – Proposition (Passage à la limite dans une inégalité)

Soient $u$ et $v$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell$ et $\ell'$.

***(i)*** Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.

***(ii)*** Si $u$ est majorée par $M$ à partir d'un certain rang alors $\ell \leqslant M$.

***(iii)*** Si $u$ est minorée par $m$ à partir d'un certain rang alors $m \leqslant \ell$.

### Démonstration

***(i)*** Raisonnons par l'absurde.

B11

B11

***(ii)*** Conséquencre de de ***(i)*** en prenant une des deux suite constante égale à M.

***(iii)*** Conséquencre de de ***(i)*** en prenant une des deux suite constante égale à $m$.

**Remarque –** Si $u$ converge vers $\ell$, $v$ vers $\ell'$ et que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, alors on a seulement $\ell \leqslant \ell'$ (et pas $\ell < \ell'$). Par exemple $u_n = \dfrac{-1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

## I.4 – Opérations sur les limites

### I.4.1 – Théorème

Soit $u$ et $v$ deux suites réelles.

***(i)*** Si $u$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $v$ vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $u+v$ converge vers $\ell + \ell'$.

***(ii)*** **[IMPORTANT]** Si $u$ est bornée et $v$ converge vers 0 alors $uv$ converge vers 0.

***(iii)*** Si $u$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $v$ vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $uv$ converge vers $\ell\ell'$.

***(iv)*** Si $u$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $\dfrac{1}{u}$ est définie àpdcr et converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

### Démonstration de *(i)*

B12

### I.4.2 – Autres cas

#### *a)* Somme

Soit $u$ et $v$ deux suites ayant pour limites $\ell$ et $\ell'$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors la limite de $u+v$ est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

| $\ell$ \ $\ell'$ | $-\infty$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | | | |
| $\ell \in \mathbb{R}$ | | | |
| $+\infty$ | | | |

Le terme « **FI** » désigne une ***forme indéterminée*** ce qui signifie que toutes les situations peuvent ***a priori*** se produire.

#### *b)* Multiplication par une constante

Soit $u$ une suite ayant une limite $\ell$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda$ un réel. Alors la limite de $\lambda u$ est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

| $\lambda$ \ $\ell$ | $-\infty$ | $\ell \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lambda < 0$ | | | |
| $0$ | | | |
| $\lambda > 0$ | | | |

#### *c)* Produit

Soit $u$ et $v$ deux suites ayant pour limites $\ell$ et $\ell'$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors la limite de $uv$ est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

| $\ell$ \ $\ell'$ | $-\infty$ | $\ell' < 0$ | $\ell = 0$ | $\ell' > 0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | | | | | |
| $\ell < 0$ | | | | | |
| $0$ | | | | | |
| $\ell > 0$ | | | | | |
| $+\infty$ | | | | | |

#### *d)* Inverse

Soit $v$ une suite ayant pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et telle que $v_n$ soit non nul à partir d'un certain rang. Alors la limite de la suite $\dfrac{1}{v}$ (définie à partir d'un certain rang) est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

| $\ell$ | $-\infty$ | $\ell < 0$ | $0^-$ | $0$ | $0^+$ | $\ell > 0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim \dfrac{1}{v}$ | | | | | | | |

Dans ce tableau la notation $\lim v = 0^+$ signifie que $v$ tend vers 0 **et** que $v_n$ reste positif à partir d'un certain rang. De même pour la notation $0^-$.

**Remarque –** En combinant les deux tableaux précédents (produit et inverse) on peut déterminer la limite (si elle existe) d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ en écrivant $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$.

# II – Théorèmes de convergence

## II.1 – Limite par encadrement

### II.1.1 – Théorème (d'encadrement ou des gendarmes)

Soit $u, v, w$ trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang. Si $u$ et $w$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $v$ converge et $\lim v = \ell$.

### Démonstration

B13

**Remarque –** En pratique, pour montrer que $\lim u = \ell$ on majore $|u_n - \ell|$ par une quantité qui tend vers 0. On en déduit alors d'après le résultat précédent que $|u_n - \ell|$ tend vers 0, donc que $u_n - \ell$ tend vers 0 et donc que $u_n$ tend vers $\ell$.

Il existe un résultat analogue pour des suites ayant une limite infinie.

### II.1.2 – Théorème

Soit $u$ et $v$ deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

***(i)*** Si $u$ tend vers $+\infty$ alors $v$ aussi.

***(ii)*** Si $v$ tend vers $-\infty$ alors $u$ aussi.

### II.1.3 – Théorème

Une suite $u$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ***si et seulement si*** $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ tendent vers $\ell$.

**Exemple –** Si on pose $u_n = q^n$ avec $q < -1$, on peut écrire $u_n = (-1)^n \left|q\right|^n$. On a alors :

$$u_{2k} = \left|q\right|^{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = -\left|q\right|^{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\infty$$

Les deux limites étant différentes, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

## II.2 – Composition par une fonction

### II.2.1 – Théorème

Soit $(a, b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a$ soit un élément ou une extrémité de I.

On suppose que $f$ est une fonction définie sur I telle que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et que $(x_n)$ est une suite d'éléments de I qui tend vers $a$. Alors $f(x_n)$ tend vers $b$.

**Exemples**

1 ▶ Un cas particulier important est celui d'une fonction $f$ ***continue*** avec $a \in \mathrm{I}$. Dans ce cas la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

2 ▶ La suite $u$ définie par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ converge vers 0. Il suffit en effet d'appliquer le théorème précédent avec $f = \exp$, $a = -\infty$ et $b = 0$.

3 ▶ La suite $u$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers $-\infty$. Il suffit en effet d'appliquer le théorème précédent avec $f = \ln$, $a = 0^+$ et $b = -\infty$.

### II.2.2 – Proposition

Soit $u$ une suite réelle.

***(i)*** $u$ converge vers 0 si et seulement si $|u|$ converge vers 0.

***(ii)*** Si $u$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $|u|$ converge vers $|\ell|$. La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$.

## II.3 – Suites monotones

### II.3.1 – Théorème (de la limite monotone)

Soit $u$ une suite monotone.

***(i)*** Si $u$ est croissante et majorée alors elle converge.

***(ii)*** Si $u$ est décroissante et minorée alors elle converge.

**Exemple –** Soit $u$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

B14

**Remarque –** Nous verrons plus tard que $\lim u = \mathrm{e}$ $(= \exp(1))$.

### II.3.2 – Corollaire

Soit $u$ une suite monotone.

***(i)*** Si $u$ est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

***(ii)*** Si $u$ est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$

### Exercice F1

Étudier la convergence des suites définies par :

**1.** $v_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ **2.** $w_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

### Exercice F2

Étudier la convergence des suites définies par :

**1.** $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$ **2.** $v_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + (-1)^n + \frac{1}{n^2}}$

### Exercice F3

Étudier la convergence de la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$$

### Exercice F4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ étudier la convergence de la suite $u$ définie par :

$$u_n = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$$

## II.4 – Suites adjacentes

### II.4.1 – Définition (Suites adjacentes)

Deux suites $a$ et $b$ sont dites ***adjacentes*** si $a$ est croissante, $b$ décroissante et si $b - a$ converge vers 0.

### II.4.2 – Théorème (Des suites adjacentes)

Si $a$ et $b$ sont deux ***suites adjacentes*** alors :

***(i)*** $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$ ;

***(ii)*** $a$ et $b$ convergent vers une limite commune $\ell$ ;

***(iii)*** $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, a_n \leqslant \ell \leqslant b_k$.

### Démonstration

B15

B15

**Exemple –** Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ les deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes.

B16

**Remarque –** Nous verrons en fin d'année que la limite commune de $a$ et $b$ vaut $\ln(2)$.

### Exercice F5

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. ***Elles ont donc une limite commune que l'on notera $\ell$.***
2. ***a)*** Écrire une fonction Python `u(n)` prenant en argument un entier naturel `n` et renvoyant la valeur de la somme $u_n$.

   ***b)*** Tester cette fonction pour différentes valeurs de $n$. Quelle conjecture faire quant à la valeur du nombre $\ell$ ?
3. On souhaite démontrer que $\ell \notin \mathbb{Q}$. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $\ell = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer alors qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $an!$ ne soit pas entier puis conclure.

### Exercice F6 (Approximations décimales d'un nombre réel)

On fixe un nombre réel $x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$p_n = \lfloor x10^n \rfloor$$

$$a_n = \frac{p_n}{10^n}$$

$$b_n = \frac{1+p_n}{10^n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que ces deux suites sont adjacentes.
3. Quelle est la limite commune de ces deux suites? En déduire que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres décimaux.
4. **Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$** - Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. Montrer que l'intervalle $]\alpha,\beta[$ contient au moins un nombre décimal.
5. **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$** - Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. Montrer que l'intervalle $]\alpha,\beta[$ contient au moins un nombre rationnel.

# III – Suites usuelles

## III.1 – Suites arithmétiques et géométriques (rappels)

### III.1.1 – Définition (Suite arithmétique)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***arithmétique*** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. On dit alors que $r$ est la ***raison*** de la suite.

### III.1.2 – Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 + n \times r$$

### III.1.3 – Définition (Suite arithmétique)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***géométrique*** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. On dit alors que $q$ est la ***raison*** de la suite.

### III.1.4 – Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 \times q^n$$

## III.2 – Suites arithmético-géométriques

### III.2.1 – Définition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

**Remarques**

1 ▶ Si $a = 1$ la suite est arithmétique de raison $b$.

2 ▶ Si $b = 0$ la suite est géométrique de raison $a$.

### III.2.2 – Méthode d'étude

***a)*** Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique donc la situation est connue.

***b)*** Sinon il existe un unique réel $c$ vérifiant $c = ac + b$. On a en effet :

$$\begin{aligned} c = ac + b &\iff c(1-a) = b \\ &\iff c = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

L'idée est alors de s'intéresser à la suite $v$ définie par $v_n = u_n - c$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = au_n + b \\ c & = ac + b \end{cases}$$

Par différence on a donc $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$ ce qui prouve que la suite $v = u - c$ est géométrique de raison $a$. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} u_n - c &= a^n\left(u_0 - c\right) \\ u_n - \frac{b}{1-a} &= a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \\ u_n &= a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} \end{aligned}$$

**Remarque –** C'est la ***méthode*** présentée ici qui est à ***retenir***, pas la formule obtenue.

**Exemple –** Considérons la suite $u$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

On cherche à exprimer $u_n$ de manière explicite en fonction de $n$.

B17

### Exercice F7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

Déterminer $u_n$ en fonction de $n$.

## III.3 – Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

### III.3.1 – Définition

On dit que qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une ***relation de récurrence linéaire d'ordre*** 2 s'il existe deux réels $a$ et $b$ (avec $b \neq 0$) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Pour tout couple $(a, b)$ fixé nous noterons $\mathscr{S}_{a,b}$ l'ensemble des suites réelles vérifiant cette relation de récurrence.

**Exemple –** La célèbre suite de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Avec les notations précédentes, cette suite est un élément de l'ensemble $\mathscr{S}_{1,1}$

**Exercice F8 (Un peu de Python avec la suite de Fibonacci)**

1. Écrire une fonction Python ***récursive*** `fibo_rec(n)` qui calcule $F_n$ de manière récursive.
   Faire afficher tous les couples $(k, F_k)$ pour $k \in [\![0, 36]\!]$.
2. Écrire une fonction Python ***itérative*** `fibo_it(n)` qui calcule $F_n$ de manière récursive.
   Faire afficher tous les couples $(k, F_k)$ pour $k \in [\![0, 100]\!]$.

### III.3.2 – Définition

On dit que $r^2 - ar - b = 0$ est ***l'équation caractéristique*** de la relation de récurrence.

**Exemple –** Pour la suite de Fibonacci, l'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$.

### III.3.3 – Théorème (Suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $b \neq 0$), $u$ une suite de $\mathscr{S}_{a,b}$ et $\Delta$ le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.

***(i)*** Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles $r_1$ et $r_2$ et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

***(ii)*** Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double $r_0$ et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + n\mu) r_0^n$$

***(iii)*** Le cas $\Delta < 0$ est hors programme.

**Exemples**

**1 ▶** On considère la suite réelle $u$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

On cherche à exprimer $u_n$ de manière explicite en fonction de $n$.

B18

**2 ▶** On considère la suite réelle $u$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

On cherche à exprimer $u_n$ de manière explicite en fonction de $n$.

B19

## Exercice F9 (Suite de Fibonacci)

Soit F le suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

**1.** Exprimer $F_n$ en fonction de $n$.

**2.** Étudier la convergence des suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

## Exercice F10 (Autres suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Expliciter $u_n$ en fonction de $n$ et étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

**1.** $u_0 = 4$, $u_1 = \dfrac{7}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{7}{6}\,u_{n+1} - \dfrac{1}{3}\,u_n$.

**2.** $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}$.

# IV – Comportement asymptotique des suites usuelles

**NB –** *Cette partie sera revue et approfondie en seconde année. Il s'agit ici d'une simple introduction.*

## IV.1 – Relation de négligeabilité

### IV.1.1 – Définition (Relation de négligeabilité o)

Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites numériques, telle que $b_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que $(a_n)$ est ***négligeable*** devant $(b_n)$ et on écrit $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ lorsque :

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

**Exemples**

1 ▶ Si $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p < q$ alors $n^p = \mathrm{o}(n^q)$. Par exemple $n^2 = \mathrm{o}(n^3)$.

B20

2 ▶ Plus généralement, si P et Q sont deux fonctions polynomiales de degrés respectifs $p$ et $q$ avec $p < q$, alors :

$$\mathrm{P}(n) = \mathrm{o}\big(\mathrm{Q}(n)\big)$$

B21

**Remarques**

1 ▶ Au lieu de dire que $(a_n)$ est ***négligeable*** devant $(b_n)$, on dit aussi que $(b_n)$ est ***prépondérante*** devant $(a_n)$.

2 ▶ La notation o est appelée notation de Landau. Au lieu de o on rencontre de temps en temps la notation suivante (attribué tantôt à Vinogradov, tantôt à Hardy, cela n'est pas très clair) :

$$a_n \ll b_n \qquad \text{au lieu de} \qquad a_n = \mathrm{o}(b_n)$$

3 ▶ Cette notation $\ll$ est très pratique pour décrire une ***classification***. Par exemple (en $+\infty$) :

$$\ln(n) \ll n \ll \mathrm{e}^n$$

Cette classification provient des ***croissances comparées*** que nous avons vues pour les fonctions :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$$

4 ▶ La classification précédente demeure vraie si on ajoute des exposants strictement positifs sur $\ln(n)$, $n$ et $\mathrm{e}^n$ (***croissances comparées « généralisées »***).
**N-B** *On admet ce résultat (ce que nous avions déjà fait dans le* **chapitre B***).*

### Exercice F11

Si $\alpha > 0$ et $a > 1$, que peut-on dire, en terme de négligeabilité, des suites $\left(n^{\alpha}\right)$ et $\left(a^n\right)$ ?

### Exercice F12

Démontrer que : $\mathrm{e}^n = \mathrm{o}\left(n!\right)$.

### Exercice F13

Démontrer que : $n! = \mathrm{o}\left(n^n\right)$.

### IV.1.2 – Proposition

On a la classification suivante en termes de négligeabilité :

$$\ln(n) \ll n \ll \mathrm{e}^n \ll n! \ll n^n$$

### Remarques

1 ▶ Là aussi, la classification reste vraie si on met des exposants strictement positifs sur chaque terme.

2 ▶ Chercher « ***puissances itérées de Knuth*** » sur le web : c'est l'explosion totale !

### Exercice F14

Ranger par ordre de négligeabilité les suites de termes généraux suivants :

$$\ln(n) \quad \mathrm{e}^n \quad n^2 \quad \left(\ln(n)\right)^{12} \quad n^{0,1} \quad 5^n \quad 2^n \quad n^{10} \quad \sqrt{\ln(n)} \quad n!$$

## IV.2 – Relation d'équivalence

### IV.2.1 – Définition (Relations d'équivalence $\sim$)

Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites numériques, telle que $b_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que $(a_n)$ est ***équivalente*** à $(b_n)$ et on écrit $a_n \sim b_n$ lorsque :

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

**Exemple** – Si P est une fonction polynomiale de degré $p$ et de coefficient dominant $\lambda$, alors : $\mathrm{P}(n) \sim \lambda n^p$

### Exercice F15

En utilisant une limite usuelle (vue dans le **chapitre B**) démontrer que :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

# V – Exercices additionnels

## Suites vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

### Exercice F16

Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{5} \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction $f$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que $\mathbb{R}_+$ est stable par $f$ (***i.e.*** $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$).
2. Dresser la tableau de variation de $f$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$. Reporter les éventuelles solutions dans le tableau de variations.
4. Déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}_+$ contenant $u_0$, stable par $f$ et le plus petit possible.
5. En déduire que la suite $(u_n)$ est à valeurs dans I.

6. Comparer $u_0$ et $u_1$ puis $u_n$ et $u_{n+1}$. En déduire que $(u_n)$ est monotone et préciser son sens de variation.
7. Démontrer que $(u_n)$ converge et que sa limite $\ell$ appartient à I.
8. Démontrer que $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$. En déduire la valeur de $\ell$.
9. Écrire une fonction Python `suite(n)` prenant comme argument un entier naturel $n$ et qui renvoie $u_n$. Vérifier que les résultats numériques obtenus sont cohérents avec la limite exacte qui a été trouvé précédemment.

### Exercice F17

Soit $f$ la fonction de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

et $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $]0, 2]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ reste dans l'intervalle $\left[\sqrt{2}, 2\right]$ c'est à dire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$$
3. Comparer $u_0$ et $u_1$, puis $u_n$ et $u_{n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(u_n)$ est monotone et préciser son sens de variation.
4. Justifier la convergence de la suite $(u_n)$ vers une limite $\ell \in \left[\sqrt{2}, 2\right]$.
5. Justifier le fait que $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de $\ell$.
6. Écrire une fonction Python `suite(n)` prenant comme argument un entier naturel $n$ et qui renvoie $u_n$. Vérifier que les résultats numériques obtenus sont cohérents avec la limite exacte qui a été trouvé précédemment.

## Autres types de suites récurrentes

### Exercice F18

On considère les deux suites réelles $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par $a_0$, $b_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 6a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}$$

1. Déterminer une matrice A de telle sorte que :
$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \mathrm{A} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$
3. Démontrer que A est de la forme $\mathrm{A} = 5\mathrm{I}_2 + \mathrm{J}$ avec $\mathrm{J}^2 = [0]$.
4. Déterminer alors $\mathrm{A}^n$ puis l'expression de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

### Exercice F19

On considère la suite $u$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On définit les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Démontrer que P est inversible et calculer $\mathrm{P}^{-1}$. Que vaut $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ ?
2. Démontrer que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$. En déduire les coefficients de $\mathrm{A}^n$.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$X_n = \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

*a)* Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_{n+1} = AX_n$. En déduire une expression de $X_n$ en fonction de $A^n$ et de $X_0$.

*b)* Déterminer la valeur de $u_n$ en fonction de $n$.

## Suites définies de manière implicite

### Exercice F20

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $nx = \cos(x)$ possède une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on notera $x_n$.
2. Sans chercher à expliciter $x_n$, montrer que la suite $(x_n)$ converge vers 0.
3. En déduire un équivalent de $x_n$.

### Exercice F21

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $g_n(x) = x^n + nx - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g_n(u_n) = 0$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n^n)$.
4. En déduire un équivalent de $u_n$.

*Fin du chapitre*