Il est demandé, comme pour les devoirs surveillés de faire très attention à la **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements. Par ailleurs, il est demandé **explicitement** aux étudiants :

- d'ajouter une **marge supplémentaire** de 3 cm sur la **droite** de leurs copies;
- de **tirer un trait horizontal** sur **toute la largeur** de la page entre **TOUTES** les questions;
- de **numéroter de manière exhaustive** toutes les copies et intercalaires;
- d'**encadrer** les résultats de leurs calculs ou raisonnements.

Problème – Fonction sinus hyperbolique et sa réciproque

Remarque – Il vous sera demandé à plusieurs reprises d'utiliser le logiciel Geogebra pour tracer des courbes de fonctions. Les opérations suivantes font partie du travail demandé (vous pouvez chercher sur le web) :

- installer le logiciel Geogebra (version classique 5) sur un ordinateur : celui-ci est libre, multiplateforme et gratuitement téléchargeable à l'adresse suivante : www.geogebra.org/download.
- trouver comment tracer le graphe d'une fonction;
- trouver le nom de toutes les nouvelles fonctions présentes dans ce devoir (par exemple sh a pour nom `sinh` et Argsh a pour nom `arcsinh` dans Geogebra);
- exporter votre figure en PDF à l'aide du menu **Fichier>Exporter>Graphique en tant qu'image** en choisissant le format PDF (ce qui permet ensuite d'imprimer ces graphiques).

Précision – *Vous ferrez en sorte que tous les graphiques se limitent à la partie du plan où $x \in [-10, 10]$ et $y \in [-10, 10]$.*

A – Études des fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Les fonctions ***cosinus et sinus hyperboliques*** sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Déterminer la parité ou imparité de ces deux fonctions ch et sh.

2. Justifier la dérivabilité de ces deux fonctions et démontrer qu'elles sont chacune la dérivée de l'autre.

3. Quel est le signe de ch sur $\mathbb{R}$? En déduire la tableau de variation de sh (complété par les limites aux bornes et valeurs aux points particuliers).

4. Déduire de la question précédente le signe de sh sur $\mathbb{R}$ puis la tableau de variation de ch (complété par les limites aux bornes et valeurs aux points particuliers).

5. Donner l'allure (approximative) des deux courbes $\mathscr{C}_{\text{ch}}$ et $\mathscr{C}_{\text{sh}}$ sur un même graphique.

6. Si vous avez accès à un ordinateur et une imprimante refaire le même tracé avec le logiciel Geogebra et exporter le résultat au format PDF. Imprimer ensuite ce fichier PDF qui constituera votre « annexe 1 ».

7. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

B – Fonction Argsh

8. Démontrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On notera $\operatorname{sh}^{-1} = \operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.

9. En justifiant votre réponse, démontrer que Argsh est continue et strictement monotone (quel sens ?) sur $\mathbb{R}$.

10. Donner l'allure (approximative) des deux courbes $\mathscr{C}_{\text{sh}}$ et $\mathscr{C}_{\text{Argsh}}$ sur un même graphique.

11. Si vous avez accès à un ordinateur et une imprimante refaire le même tracé avec le logiciel Geogebra et exporter le résultat au format PDF. Imprimer ensuite ce fichier PDF qui constituera votre « annexe 2 ».

C – Dérivabilité d'une réciproque

On admet le théorème suivant :

> Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, réalisant une bijection entre I et $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.
>
> ***(i)*** Si f est dérivable sur I et que f' n'est jamais nulle sur I alors la réciproque f^{-1} est dérivable sur J. De plus, pour tout $x \in \mathrm{I}$, si on note $y = f(x)$ on a :
> $$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
>
> ***(ii)*** Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$ avec $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et le courbe de f^{-1} admet en y_0 une tangente verticale.

12. Dans le cas ***(i)***, démontrer que :

$$\forall y \in \mathrm{J},\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

13. En déduire, toujours dans le cas ***(i)***, l'égalité fonctionnelle :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

D – Dérivée de Argsh

14. Justifier la dérivabilité de Argsh sur $\mathbb{R}$ et démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

15. Quelles sont les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{sh}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{Argsh}}$ au point d'abscisse 0 ?

Fin de l'énoncé