Mathématiques

Devoir surveillé n° 1

Mercredi 15 septembre 2021

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au surveillant, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les étudiants sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs ou raisonnements.

L'usage de calculatrices est interdit.

Les quatre problèmes sont indépendants.

Problème A – Probabilités

Dans ce problème, il est possible de s'aider d'un arbre de probabilité. Mais tout calcul doit être justifié par un théorème et doit d'abord être présenté de manière littérale avant de faire un calcul numérique.
Les calculatrices étant interdites, la simplification optimale des valeurs numériques n'est pas demandée.

Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges : moins de 25 ans, de 25 à 50 ans, plus de 50 ans. Le tableau ci-dessous fournit des informations : la proportion d'assurés appartenant à chaque classe et la probabilité qu'un assuré, d'une classe donnée, déclare au moins un accident au cours de l'année.

Classe	proportion	probabilité
moins de 25 ans	0,25	0,12
de 25 à 50 ans	0,53	0,06
plus de 50 ans	0,22	0,09

1. Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au mois un accident au cours de l'année ?

2. Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident au cours de l'année soit âgé d'au plus 25 ans ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'un assuré âgé de 25 ans ou plus ait au moins un accident au cours de l'année ?

4. Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans ?

Problème B – Une étude de fonction

Dans ce problème, on se propose d'étudier la fonction f de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{4+4\ln(x)}{x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

2. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathscr{D}_f$ et calculer $f'(x)$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant le(s) point(s) remarquable(s).

4. Déterminer (en justifiant) les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Faire figurer ces limites dans le tableau de variation déjà obtenu.

5. En déduire l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de f notée $\mathscr{C}_f$.

6. Justifier la dérivabilité de f' sur $\mathscr{D}_f$ (et donc l'existence de f''). Calculer ensuite $f''(x)$.

7. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathscr{D}_f$.

8. Montrer que f est concave sur un intervalle I que l'on précisera, qu'elle est convexe sur un intervalle J que l'on déterminera et que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion que l'on précisera.

9. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ en faisant figurer tous les éléments remarquables : asymptote(s), extremum(s), points particuliers, tangentes aux points particuliers.

Problème C – Étude d'une suite récurrente

Dans ce problème on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 \end{cases}$$

1. ***a)*** Exprimer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

b) Écrire une fonction Python `suite(n)` prenant en argument un entier naturel n et renvoyant (une valeur approchée de) u_n.

On admet que les premières valeurs obtenues sont les suivantes :

n	u_n
0	1
1	1,75
2	2,5625
3	3,421875
4	4,31640625

c) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. ***a)*** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$$

3. On désigne par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

Problème D – Calculs élémentaires dans $\mathbb{R}$

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$$\mathrm{A} = \frac{7}{3}\left(2 - \frac{11}{4}\right) \qquad \mathrm{B} = \frac{1+\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{3}} \qquad \mathrm{C} = \frac{4}{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}} \qquad \mathrm{D} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}$$

2. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un entier ou sous la forme $a\sqrt{b}$ (pas de racine aux dénominateurs) :

$$\mathrm{E} = 3\sqrt{8}+5\sqrt{32}-7\sqrt{18} \qquad \mathrm{F} = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2 \qquad \mathrm{G} = \sqrt{1+\frac{4}{5}} \qquad \mathrm{H} = 5\sqrt{2}+3\sqrt{98}-2\sqrt{242}$$

3. Simplifier les expressions suivantes (pour K et L on demande un résultat sous la forme $a^n b^p c^q$ avec n, p, q entiers relatifs) :

$$\mathrm{I} = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \qquad \mathrm{J} = \frac{\left(2^{-4}\times 5^2\right)^2}{5^2\times 2} \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{b^3}\times\frac{ac}{b^2}\times\frac{a^3b^2}{c^4} \qquad \mathrm{L} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \times \frac{a^{-2}}{c^{-3}} \times \left(\frac{b^{-2}}{c^3}\right)^2$$

Fin de l'énoncé