Consignes

Généralités
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Calculatrices
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Présentation
Il est demandé **explicitement** aux étudiants :

- d'ajouter une **marge supplémentaire** de 3 cm sur la **droite** de leurs copies ;
- de **tirer un trait horizontal** sur **toute la largeur** de la page entre **TOUTES** les questions ;
- de **numéroter de manière exhaustive** toutes les copies et intercalaires ;
- d'**encadrer** les résultats de leurs calculs ou raisonnements.

Exercice 1 – Une étude de fonction (d'après EML 2021)

Rappels – Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et a un élément de I. Par ***définition*** on dit que :

- f est continue au point a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$;
- f est dérivable au point a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite finie en a $\big($et dans ce cas la limite vaut $f'(a)\big)$.

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. ***a)*** Justifier rapidement la continuité de φ sur $]-\infty, 1[$.

b) Étudier la continuité de φ en 1 en revenant à la définition.

On en déduit que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.

2. ***a)*** Justifier la dérivabilité de φ sur $]-\infty, 1[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$.

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

c) Étudier la dérivabilité de φ en 1 en revenant à la définition.

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1. On représentera en particulier les tangentes ou asymptotes aux points remarquables.

Exercice 2 – Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Les fonctions ***cosinus et sinus hyperboliques*** sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

On donne quelques valeurs approchées de ces deux fonctions dans le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\mathrm{ch}(x) \simeq$	1	1,13	1,54	2,35	3,76	6,13	10,07
$\mathrm{sh}(x) \simeq$	0	0,52	1,18	2,13	3,63	6,05	10,02

1. Déterminer la parité ou imparité de ces deux fonctions ch et sh.

2. Justifier la dérivabilité de ces deux fonctions et démontrer qu'elles sont chacune la dérivée de l'autre.

3. Quel est le signe de ch sur $\mathbb{R}$? En déduire la tableau de variation de sh (complété par les limites aux bornes et valeurs aux points particuliers).

4. Déduire de la question précédente le signe de sh sur $\mathbb{R}$ puis le tableau de variation de ch (complété par les limites aux bornes et valeurs aux points particuliers).

5. On souhaite tracer les courbes représentatives des deux fonctions ch et sh en choisissant 1 cm comme unité graphique et en se limitant à la partie du plan où $x \in [-10, 10]$ et $y \in [-10, 10]$ (quitte à déborder légèrement sur les marges).

a) En justifiant votre réponse, recopier et remplir le tableau suivant :

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
$\mathrm{ch}(x) \simeq$							
$\mathrm{sh}(x) \simeq$							

b) Tracer simultanément les deux courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{ch}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{sh}}$ avec le plus grand soin.

6. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

■ Exercice 3 – Un calcul de somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2$$

$$\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(2k+1\right)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + (2n+1)^2$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression factorisée de T_n en fonction de n.

1. Rappeler l'expression de R_n en fonction de n puis démontrer cette formule.

2. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathrm{S}_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. ***a)*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, développer $\left(2k+1\right)^2$

b) Utiliser les questions précédentes pour déterminer une expression factorisée de T_n en fonction de n.

c) Application numérique – Calculer la valeur de $\mathrm{U} = 1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169 + 225 + 289 + 361 + 441$.

■ Exercice n° 4 - Somme géométrique dérivée

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} \qquad \mathrm{G}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. Calculer $\mathrm{G}_n(1)$.

2. Calculer $\mathrm{H}_n(1)$.

3. Justifier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\mathrm{G}_n : x \mapsto \mathrm{G}_n(x)$ puis exprimer $\mathrm{G}_n'(x)$ à l'aide du symbole *Sigma*.

On suppose désormais que $x \neq 1$.

4. **Question de cours –** Démontrer que : $\quad \mathrm{G}_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

5. En déduire une expression de $H_n(x)$.
6. Déterminer une expression simplifiée de $H_n(2)$.
7. Donner la valeur de $H_{10}(2)$.

■ Exercice 5 – Somme des cubes d'entiers

Le but de cet exercice est de déterminer une expression factorisée de la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

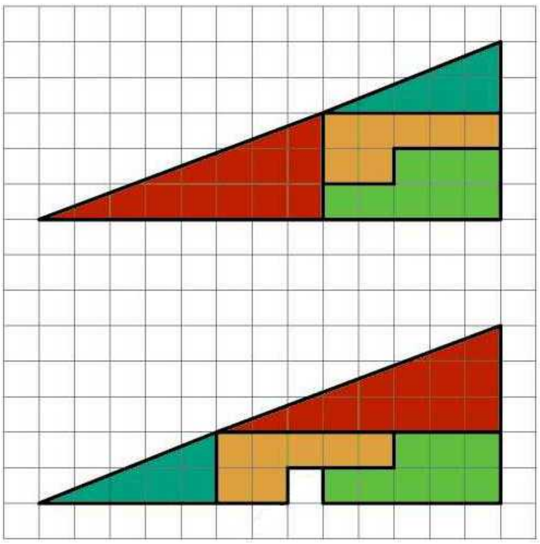
1. Déterminer un polynôme de la forme $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x) = x^3$$

2. En déduire la valeur de la somme S_n, que l'on factorisera.

■ Exercice 6 – *Just for fun*

Mais où est donc le carreau manquant ?



Fin de l'énoncé