▸ Raisonnement direct

Un ***raisonnement direct*** est une méthode de démonstration consistant essentiellement en une succession de déductions logiques élémentaires (terme que nous ne définirons pas de manière rigoureuse).

Exemple – La somme de deux entiers pairs est paire.

Démonstration

Si x et y sont pairs alors il existe des entiers a et b tels que $x = 2a$ et $y = 2b$. On a alors :

$$x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$$

On en déduit que $x + y$ est un nombre pair.

▸ Raisonnement par contraposée

Un ***raisonnement par contraposée*** repose sur le fait qu'une implication $A \Longrightarrow B$ et sa contraposée $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$ sont logiquement équivalentes. Les deux énoncés $A \Longrightarrow B$ et $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$ étant logiquement équivalent, démontrer l'un c'est démontrer l'autre.

Exemple – Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration

Raisonnons par contraposée en prouvant que si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair.
Si n n'est pas pair, c'est qu'il est impair. Par définition cela signifie l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
On a alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{p} + 1 = 2p + 1$$

Cela qui prouve que n^2 est impair et donc que n^2 n'est pas pair.

▸ Raisonnement par l'absurde

Un ***raisonnement par l'absurde*** repose sur le fait qu'un énoncé P est vrai si et seulement si son contraire est faux.
Ainsi, pour démontrer que P est vrai, on peut montre que $\overline{P}$ conduit (par une suite de déduction logique) à une contradiction ce qui prouve que $\overline{P}$ est faux et donc que P est vrai.
Si l'on souhaite démontrer un théorème de la forme $H \Longrightarrow C$ on montre donc que H ET $\overline{C}$ conduit à une contradiction.

Exemples

1 ▸ Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel (*voir le théorème **I.1.4** du chapitre **A***).

2 ▸ Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ démontrons l'implication :

$$\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Longrightarrow x = y$$

Démonstration

On raisonne ***par l'absurde*** en supposant que $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x}$ et $x \neq y$. La première égalité donne :

$$x(1+x) = y(1+y)$$

d'où :

$$x + x^2 = y + y^2$$

puis :

$$x - y = -x^2 + y^2$$

et donc :

$$x - y = -(x^2 - y^2) = -(x-y)(x+y)$$

On peut alors diviser par $x - y \neq 0$ et on obtient :

$$1 = -(x + y)$$

Ainsi, $x + y = -1$ ce qui est ***contradictoire*** avec le fait que x et y soient positifs.

▸ Démonstration d'une équivalence

Pour démontrer une équivalence $P \Longleftrightarrow Q$ on peut :

- soit procéder par ***double implication*** en démontrant séparément $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$;
- soit raisonner directement par équivalence (symbole $\Longleftrightarrow$ ou ***si et seulement si***), mais ***attention***, il faudra bien s'assurer que chaque étape est bien équivalente à la précédente.

Exemple – Caractérisation de la bijectbivité d'une application $f : E \to F$ par l'existence d'une application $g : F \to E$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (*voir le théorème* **I.3.5** *du chapitre* **B**).

▸ Raisonnement par récurrence (simple)

Considérons un propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n. Le principe du ***raisonnement par récurrence*** consiste à trouver un entier n_0 tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
- $\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Dans ce cas, on peut alors affirmer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple – On peut démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*voir proposition* **I.1.3** *du chapitre* **C**).

▸ Raisonnement par récurrence double

Considérons un propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n. Le principe du ***raisonnement par récurrence double*** consiste à trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ ET $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vrais ;
- $\forall n \geqslant n_0,\ \left(\mathscr{P}(n) \text{ ET } \mathscr{P}(n+1)\right) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$

Dans ce cas, on peut alors affirmer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple – Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

Démonstration

- **Initialisation double –** On a $u_0 = 2 = 2^0 + 1$ **et** $u_1 = 3 = 2^1 + 1$ donc la propriété est vraie aux rang 0 et au rang 1.
- **Hérédité double –** Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que la propriété soit vérifiée aux rang n et $n+1$ alors on a :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3\left(2^{n+1} + 1\right) - 2\left(2^n + 1\right) = 2^{n+2} + 1$$

c'est à dire la propriété au rang $n+2$.

D'après le principe de récurrence double la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▸ Raisonnement par récurrence forte

Soit $\mathscr{P}(n)$ un énoncé dépendant d'un entier naturel n. Le principe du ***raisonnement par récurrence forte*** consiste à trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vrai ;
- $\forall n \geqslant n_0,\ \Big(\mathscr{P}(n_0) \text{ ET } \mathscr{P}(n_0+1) \text{ ET } \cdots \text{ ET } \mathscr{P}(n)\Big) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$

Dans ce cas, on peut alors affirmer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple – Tout entier $n \geqslant 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers *(voir exercice* **A16***)*.

▸ Raisonnement par analyse et synthèse

Résoudre un problème (par exemple une équation) par ***analyse et synthèse*** consiste à :

- trouver des conditions ***nécessaires*** concernant les solutions ***éventuelles*** de ce problème (***phase d'analyse***) ;
- étudier si ces conditions sont ***suffisantes*** pour avoir une solution (***phase de synthèse***).

Exemple – Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire, de manière unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire *(voir exercice* **B4** *)*.

▸ Raisonnement par disjonction de cas

Pour résoudre un problème mathématique (par exemple une équation) on peut être amené à ***distinguer différents cas***. Dans une telle situation il faudra alors :

- faire attention à ce que tous les cas soient traités (*i.e.* que l'on « oublie personne ») ;
- faire la synthèse finale pour regrouper les différents résultats.

Exemple – Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $|2x+1| = x^2$ *(voir exercice* **A19***)*.

▸ Utilisation d'un contre exemple

Pour prouver qu'un énoncé de la forme $A =$ « $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » est faux, il ***suffit*** de trouver un élément $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{P}(x_0)$ soit faux.

Exemple – Démontrons que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x^2+1} \end{array}$ n'est ni paire, ni impaire.

Démonstration

Attention – Écrire $f(-x)$ et se contenter de constater que l'on obtient ni $f(x)$ ni $-f(x)$ n'est pas suffisant. Il se peut, en effet, que deux expressions en apparence différentes donnent malgré tout des valeurs égales $\left(\text{exemple } \cos^2(x) \text{ et } 1 - \sin^2(x)\right)$.

Pour montrer que f n'est pas paire, cherchons un réel x_0 tel que $f(-x_0) \neq f(x_0)$.
Le réel $x_0 = 1$ convient car $f(-1) = 0 \neq 1 = f(1)$.

Pour montrer que f n'est pas impaire, cherchons un réel x_1 tel que $f(-x_1) \neq -f(x_1)$.
Le réel $x_1 = 1$ convient car $f(-1) = 0 \neq -1 = -f(1)$.

▸ Inclusion et égalité d'ensembles

Soit E et F deux ensembles.

- **Inclusion**
  Pour montrer que $E \subset F$, on considère un élément quelconque de E, ***on lui donne un nom*** (sinon comment le manipuler !?) et on démontre qu'il appartient à F.
- **Non inclusion**
  Pour démontrer que $E \not\subset F$ il suffit de trouver un élément $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin F$.
- **Égalité**
  Pour démontrer que $E = F$, le plus souvent on démontre séparément $E \subset F$ et $F \subset E$ (raisonnement par ***double inclusion***).

Exemple – *Voir exercices* **D6** *et* **D7**.

▸ Égalité entre deux fonctions

Par définition deux fonctions f et g sont égales si :

- elles ont le même ensemble de départ (que l'on notera X) ;
- elles ont le même ensemble d'arrivée (que l'on notera Y) ;
- elles « coïncident » en tout point de X *i.e.* : $\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$

En pratique, pour montrer que deux fonctions f et g sont égales, on considère donc un élément quelconque de X, ***on lui donne un nom***, par exemple x, et on démontre (par un calcul ou un raisonnement) que $f(x) = g(x)$.

Exemple – *Voir exercice* **D8**.

Fin de la fiche