Définition d'un ensemble

- On peut définir un ensemble *en extension* en donnant la liste de ses éléments :

$$E = \{a, b, c, d\} \quad F = \{1, 2, 3\}$$

- On peut également définir un ensemble *en compréhension* c'est à dire qu'on le définit par une propriété caractéristique parmi les éléments d'un ensemble donné. L'ensemble des réels dont le carré vaut 4 se note par exemple :

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 = 4\right\}$$

Bien entendu il s'agit dans ce cas de la *paire* $\{-2, 2\}$.

- On peut aussi décrire un ensemble comme l'ensemble des images par une fonction (voir ci-après). Par exemple :

$$\left\{k^2 \ / \ k \in \mathbb{N}\right\}$$

désigne l'ensemble des carrés parfaits c'est à dire l'ensemble des images des entiers naturels par la fonction carré.

Notion de fonction

- Une *fonction* f est la mise en correspondance entre un *ensemble de départ* E et un *ensemble d'arrivé* F. Plus précisemment, à tout élément x de E est associé un unique élément de F noté $f(x)$ et appelé *image* de x par f.
- Les termes *fonctions* et *application* seront pour nous équivalents.
- Pour dire que f est une fonction de E dans F on écrit $f : E \to F$.

Définition d'une fonction

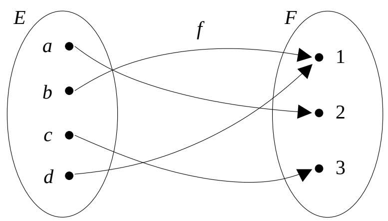
- Si E et F sont des ensembles finis, définir une fonction $f : E \to F$, c'est simplement préciser l'image de chacun des éléments de E.
  Par exemple si $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ on peut définir une unique fonction f en posant $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 3$ et $f(d) = 1$.
- Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, une fonction $f : E \to F$ est souvent donnée par une formule. Par exemple

$$f : \begin{array}{ccc} [0,4] & \longrightarrow & [0,2] \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

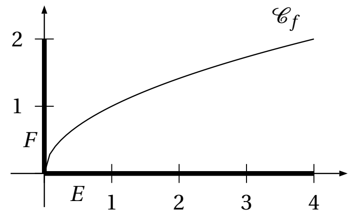
est la fonction de $[0,4]$ dans $[0,2]$ qui a tout réel de $[0,4]$ associe sa racine carrée.

Représentation graphique

- Si les ensembles E et F sont finis, on peut les représenter graphiquement sous la forme de « patatoïdes » et une fonction f entre E et F peut être représentée par des flêches entre les éléments de E est les éléments de F.
  Pour la fonction de $\{a, b, c, d\}$ dans $\{1, 2, 3\}$ définie ci-dessus on a par exemple la représentation suivante :

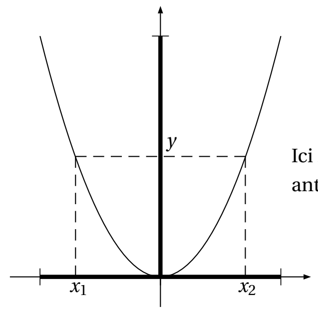


- Si les ensembles E et F sont des intervalles bornés de $\mathbb{R}$, une fonction f peut être représentée par sa *courbe* c'est à dire le sous-ensemble du plan $\mathscr{C}_f = \left\{(x, f(x)) \ / \ x \in E\right\}$. Pour la fonction racine carrée de $[0,4]$ dans $[0,2]$ on a par exemple la représentation suivante :



Antécédent

- Soit f une fonction de E dans F et $y \in F$. Un appelle *antécédent* de y par f tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- Attention, un élément peut posséder *plusieurs* antécédents! Si on considère par exemple la fonction de $\{a, b, c, d\}$ dans $\{1, 2, 3\}$ définie ci-dessus, l'élément $y = 1$ possède deux antécédents : b et d.
- Si E et F sont des ensembles finis les antécédents d'un élément $y \in F$ peuvent être déterminés graphiquement. Il s'agit des éléments de E à partir desquel il existe une flêche qui mène à y.
- Si E et F sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, les antécédents d'un élément $y \in F$ peuvent être déterminés graphiquement. Pour cela il suffit de tracer la droite horizontale d'ordonnée y puis de repérer les points d'intersections avec le graphe de f. Les abscisses de ces points d'intersections sont les antécédents de y.



Ici x_1 et x_2 sont les antécédents de y.

Image, préimage

- Soit $f : E \to F$ une fonction et A une partie de E. On appelle *image* de A par f l'ensemble des images par f de tous les éléments de A. Il s'agit donc de l'ensemble :

$$f(A) = \left\{f(x) \ / \ x \in A\right\}$$

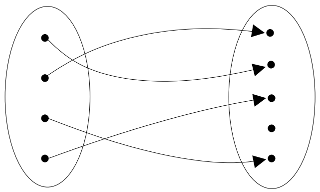
- Soit $f : E \to F$ une fonction et B une partie de F. On appelle *préimage* (ou *image réciproque*) de B par f l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B. On le note :

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in E \ / \ f(x) \in B\right\}$$

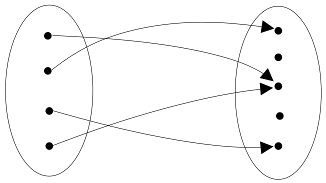
Il s'agit donc de l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de B.

Injection

- On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est *injective* (ou que c'est une *injection*) si tout élément de F possède au *plus* un antécédent par f. Autrement dit chaque élément de F est atteint au plus une fois par la fonction.
- Si E et F sont des ensembles finis, cela signifie graphiquement qu'aucun éléments de F n'est atteint par plusieurs flèches.

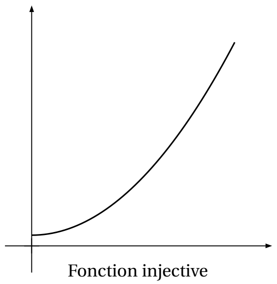


Fonction injective

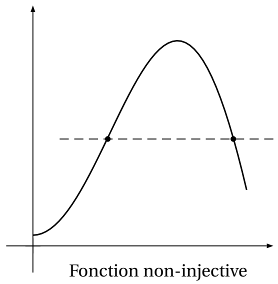


Fonction non−injective

- Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela signifie graphiquement qu'il est impossible de trouver deux points du graphe de f à la même hauteur.



Fonction injective



Fonction non-injective

- La définition est équivalente à dire que deux éléments différents de E ont toujours des images différentes. Ou encore que deux éléments ayant la même image sont nécessairement égaux. En langage mathématique cela s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

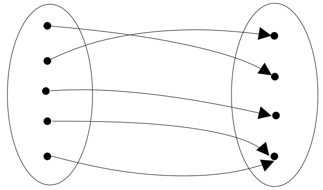
- En général, pour justifier qu'une fonction f est injective, on considère deux éléments ayant la même image et on *démontre* qu'ils sont égaux (par exemple par un calcul).
- Si f est une *application linéaire*, il suffit de démontrer que son noyau est réduit à $\{0\}$ (voir plus tard dans l'année).
- Une fonction strictement monotone est automatiquement injective.

Surjection

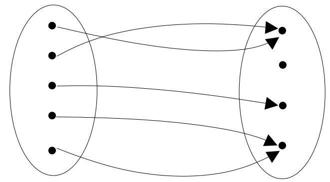
- On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est *surjective* (ou que c'est une *surjection*) si tout élément de F possède au *moins* un antécédent par f. Autrement dit chaque élément de F est atteint au moins une fois par la fonction. En langage mathématiques cela s'écrit :

$$\forall y \in \mathrm{F}, \exists x \in \mathrm{E}, y = f(x)$$

- Si E et F sont des ensembles finis, cela signifie graphiquement que chaque élément de F est atteint au moins par une flèche.

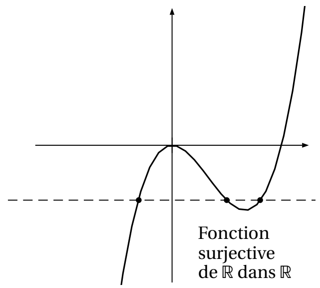


Fonction surjective

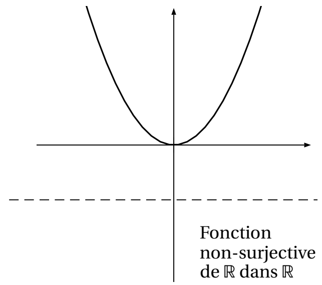


Fonction non−surjective

- Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela signifie graphiquement que toutes les droites horizontales dont l'ordonnée est dans F coupent la courbe au moins une fois.



Fonction surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



Fonction non-surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- On peut toujours transformer une fonction non-surjective en une fonction surjective en modifiant l'espace d'arrivée. Il suffit en effet de limiter l'espace d'arrivée aux valeurs atteintes par la fonction. Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective si l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ mais elle le devient si l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}_+$.
- Si une fonction est continue, il est possible de justifier sa surjectivité à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires (attention de bien donner tous les détails).

Bijection

- On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est *bijective* (ou que c'est une *bijection*) si tout élément de F possède *exactement* un antécédent par f. Autrement dit chaque élément de F est atteint une et une seule fois par la fonction. En langage mathématiques cela s'écrit :

$$\forall y \in \mathrm{F}, \exists! x \in \mathrm{E}, y = f(x)$$

- Une fonction est donc bijective si et seulement si elle est injective et surjective.
- Si E et F sont des ensembles finis, cela signifie graphiquement que chaque élément de F est atteint par une unique flèche.
- Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela signifie graphiquement que toutes les droites horizontales dont l'ordonnée est dans F coupent la courbe en un unique point.

Réciproque d'une bijection

- Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, la *réciproque* de f est la fonction $f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ qui a tout élément $y \in \mathrm{F}$ associe son unique antécédent par f. Cette fonction réciproque f^{-1} est elle aussi bijective et sa réciproque est f.
- Une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Dans ce cas g est la réciproque de f.
- *Théorème de la bijection.* Si f est une fonction continue est strictement monotone définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors :
  - $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ est un intervalle ;
  - f réalise une bijection de I dans J ;
  - $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ est aussi continue et strictement monotone (de même sens que f).