Objectifs et savoir-faire

Chapitre B – Fonctions usuelles

Reprise depuis le début du chapitre B (voir programmes de colle antérieur).

À cela s'ajoute ce qui suit.

- Connaître la définition de la continuité en un point et sur un intervalle de $\mathbb{R}$ d'une fonction et son interprétation (intuitive) en terme de tracé de la courbe représentative dans le cas d'une fonction à valeur réelle.
- Savoir démontrer que la dérivabilité en un point implique la continuité en ce point.
- **Maîtriser DE MANIÈRE ABSOLUMENT PARFAITE** le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), qui peut s'énoncer de différentes manières, mais dans lequel il n'y a **ABSOLUMENT PAS** d'hypothèse de monotonie et de conclusion en terme d'unicité.
- **Maîtriser DE MANIÈRE ABSOLUMENT PARFAITE** le corollaire du TVI dans le cas particulier d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.
- **Maîtriser DE MANIÈRE ABSOLUMENT PARFAITE** le « théorème de la bijection », possédant trois hypothèses et trois conclusions.
- Ne **SURTOUT** pas confondre les trois théorèmes suivant : TVI, son corollaire dans le cas strictement monotone et le théorème de la bijection.
- Dans le cas d'une bijection f réelle de la variable réelle, connaître et savoir exploiter la symétrie qui existe entre le graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction « directe » et le graphe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque.
- Connaître, même s'il est à la limite du programme, le théorème de dérivabilité d'une réciproque (dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle).
  Important – Ne pas oublier qu'en cas de dérivabilité en x_0 avec $f'(x_0) = 0$, la fonction f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$ mais que l'on dispose malgré tout d'une information géométrique : la présence d'une (demi)-**tangente verticale** en y_0 pour la courbe de la fonction f^{-1}.
- Savoir appliquer ce théorème pour justifier le dérivabilité ou la non-dérivabilité d'une fonction réciproque et pour éventuellement calculer la dérivée de la fonction réciproque.

Catalogue de fonctions usuelles

- Connaître la définition et les propriétés de la fonction $x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{Z}$).
- Connaître la définition et les propriétés de la fonction racine carrée.
- Connaître la définition et les propriétés de la fonction valeur absolue.
- Connaître la définition et les propriétés de la fonction partie entière.
- Connaître la définition et les propriétés des fonctions polynomiale :
  - définition (on confond polynôme et fonctions polynomiales) ;
  - notation $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$;
  - opérations sur les polynômes ;
  - notion de degré, degré d'un produit, degré d'un somme ;
  - continuité et dérivabilité sur $\mathbb{R}$;
  - si P est de degré n et son coefficient dominant vaut a_n alors la dérivée n-ième c'est-à-dire $\mathrm{P}^{(n)}$ est égale à $n!a_n$;
  - relation de divisibilité entre polynômes ;
  - division euclidienne entre polynôme ;
  - si un polynôme P de degré au plus n possède au moins $n+1$ racines distinctes alors P est le polynôme nul ;
  - deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ qui coïncident en au moins $n+1$ points sont nécessairement égaux, d'où le principe d'identification des coefficients (degré par degré) ;
  - résultat analogue lorsque deux polynômes coïncident sur un ensemble infini.
- Connaître la définition et les propriétés des fractions rationnelles (quotient de polynôme).
- Connaître le principe de la décomposition en éléments simple sachant que les détails sont hors programme.
- Connaître les croissances comparées classiques.
- Connaître les limites usuelles suivantes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1)}{x}$$

- Connaître la notion de puissance généralisée : $a^b \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{e}^{b\ln(a)}$ (pour $a > 0$). Ainsi que les règles de calculs pour cette nouvelle notion.
- Fonction puissance généralisée : $x \mapsto x^\alpha$. Définition, dérivabilité et dérivée, allure de la courbe dans les différents cas.
- Connaître les croissances comparées généralisées (avec des exposants strictement positifs).

Exercices à savoir refaire

Exercices du chapitre B.

Questions de cours exigibles (énoncé précis et démonstration)

Q7. Caractérisation de la bijectivité : théorème **I.3.5** dans le chapitre **B**.

Q8. Dérivabilité et dérivée de la fonction racine carrée : exemple page 10 du chapitre **B**.

Q9. Dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication – *On se placera en un point $a \in \mathbb{R}$ et on utilisera la formule du binôme de Newton sous la forme :*

$$(a+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k = a^n + na^{n-1}h + h^2 \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-2} \right)$$

Q10. Croissance comparée : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.
Indication – *On pourra commencer par démontrer l'encadrement suivant :* $\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \sqrt{x}$

Q11. Limite usuelle : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$.