Pratiques calculatoires élémentaires

Chapitre
A
Cours et exercices

Le but de ce chapitre est de consolider certaines connaissances du lycée. Aucune difficulté théorique ne sera développée ici et les résultats seront rappelés, le plus souvent, sans démonstration. Beaucoup de notions évoquées ici seront largement développées dans les chapitres ultérieurs. Ce chapitre sera également l'occasion d'introduire un certain nombre de notations propres à l'écriture des mathématiques.

Sommaire

I – Calcul algébrique dans les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

La présentation est faite ici dans le cadre des nombres complexes et donc s'applique évidemment aux nombres réels. Les propriétés véritablement spécifiques aux nombres complexes feront l'objet d'un chapitre dédié.

I.1 – Ensembles de nombres

I.1.1 – Notion d'ensemble

Rappelons pour commencer que si E est un *ensemble*, la notation « $x \in \mathrm{E}$ » signifie que x est un *élément* de l'ensemble E. Par exemple la notation $x \in \mathbb{R}$ signifie que x est un élément de l'ensemble des nombres réels c'est à dire que x est un nombre réel.

Au contraire, la notation $x \notin \mathrm{E}$ signifie que x n'est pas un élément de E. Par exemple la notation $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ signifie que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre entier (voir ci-après).

Remarques

1 ▶ Nous ne définirons pas la notion d'ensemble. Il s'agit d'une *notion première* que nous nous contenterons d'utiliser conformément à notre intuition et à certain nombre de règles que nous rencontrerons au fur et à mesure de l'année.

2 ▶ Il y a plusieurs moyens pour décrire un ensemble (dans ce contexte, *décrire un ensemble* signifie être capable de dire quels précisément sont ses éléments).

Exemples

1 ▶ On peut décrire un ensemble *en extension* en donnant la liste de ses éléments :

B1

2 ▶ On peut décrire un ensemble *en compréhension* en donnant une propriété qui *caractérise* ses éléments. L'ensemble des réels *dont le carré vaut* 4 se note par exemple :

B2

(bien entendu cet ensemble n'est rien d'autre que la *paire* $\{-2, 2\}$).

3 ▶ On peut décrire un ensemble comme l'ensemble des images par une fonction. Par exemple :

B3

désigne l'ensemble des *carrés parfaits* c'est à dire l'image des entiers naturels par la fonction *élévation au carré* $x \mapsto x^2$.

I.1.2 – Entiers

Les entiers *naturels* sont les entiers positifs ou nuls. L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{N}$. Les entiers de signes quelconques sont appelés entiers *relatifs* et on note $\mathbb{Z}$ l'ensemble de ces nombres. L'ensemble $\mathbb{N}$ est donc *inclus* dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ ce l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On note également $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels *non nuls* et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs *non nuls*. Par ailleurs, la notation $[\![n, p]\!]$ désignent l'ensemble des entiers qui sont supérieurs ou égaux à n et inférieurs ou égaux à p. Par exemple $[\![-2, 5]\!]$ est constitué des entiers $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Certains ont étudié au lycée (en spécialité) les propriétés *arithmétiques* des entiers. Nous reverrons certaines de ces notions plus tard dans l'année mais il faut au moins connaitre le principe de la *division euclidienne*.

I.1.3 – Théorème (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $b \in \mathbb{Z}^*$ il existe deux entiers (relatifs) q et r ***uniques*** vérifiant :

B4

On dit que a est le *dividende*, b le *diviseur*, q le *quotient* et r le *reste* de la division. Au dela de cette formulation théorique il convient de savoir poser une division *en pratique*. Par exemple :

B5

I.1.4 – Nombre rationnels

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres *rationnels* est l'ensemble des fractions d'entiers. Autrement dit :

B6

La notation $\mathbb{Q}^*$ désigne bien sûr l'ensemble des nombres rationnels non nuls.

Tout rationnel s'écrit de manière *unique* sous la forme $\dfrac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et a et b n'ayant aucun diviseur commun (autre que 1). On dit alors que la fraction est *irréductible* et c'est toujours sous cette forme qu'il est préférable de donner les résultats rationnels.

Il existe des réels non rationnels, on dit qu'ils sont *irrationnels*. Par exemple $\sqrt{2}$, π et $e = \exp(1)$ sont des nombres irrationnels.

I.1.5 – Proposition

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration

B7

Remarque – Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé le fait que si a est un nombre entier dont le carré est pair, alors a est lui même pair. Justifions cela.

Démonstration

B8

I.1.6 – Nombres décimaux

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres *décimaux* est l'ensemble des fractions d'entiers dont le dénominateurs est une puissance de 10. Autrement dit :

B9

De manière équivalente un nombre réel est décimal si et seulement si son écriture décimale ne comporte qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

Prenons par exemple $x = 5,283$. Avec cette notation, 5 est le chiffre des unités, 2 est le chiffre des dixièmes, 8 celui des centièmes, 3 celui des millièmes et on a :

B10

En réduisant au même dénominateur on a donc :

B11

ce qui prouve que x est bien un nombre décimal.

Considérons maintenant le nombre $y = \dfrac{1}{3}$. Son écriture décimale est infinie :

$$y = 0,\underbrace{333333333...}_{\text{infinité de 3}}$$

Ainsi $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Revenons sur cette écriture *infinie* : que signifie-t-elle exactement ? De même que dans l'exemple précédent on pourrait écrire

B12

ce qui déplace le problème sans le résoudre ! Que signifie en effet une *somme infinie* ? Cette notion sera abordée en détail dans le chapitre consacrée aux *séries numériques*. Mais nous pouvons déjà donner un aperçu : une somme infinie est en fait une limite de sommes finies. Si l'on note :

$$u_n = 0,\underbrace{33...33}_{n \text{ chiffres}}$$

alors on a :

B13

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

I.1.7 – Autres notations

Il existe, pour certains intervalles de $\mathbb{R}$, des notations spécifiques que nous donnons ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_+ &= \left[0,+\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\right\}\\
\mathbb{R}_+^* &= \left]0,+\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}\\
\mathbb{R}_- &= \left]-\infty,0\right] = \left\{x \in \mathbb{R}, x \leqslant 0\right\}\\
\mathbb{R}_-^* &= \left]-\infty,0\right[= \left\{x \in \mathbb{R}, x < 0\right\}
\end{aligned}$$

Des notations analogues peuvent être utilisées pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

I.2 – Un peu de langage mathématique

I.2.1 – Définition (Quantificateurs)

(i) Pour indiquer qu'un énoncé (ou propriété) mathématiques est vrai *quel que soit* l'élément x dans l'ensemble E on écrit : « $\forall x \in \mathrm{E}$ ». Le symbole $\forall$ est appelé ***quantificateur universel***.

(ii) Pour indiquer qu'un énoncé (ou propriété) mathématiques est vrai *pour au moins* un élément x dans l'ensemble E on écrit : « $\exists x \in \mathrm{E}$ ». Le symbole $\exists$ est appelé ***quantificateur existentiel***.

(iii) Pour indiquer qu'un énoncé (ou propriété) mathématiques est vrai *pour un unique* élément x dans l'ensemble E on écrit : « $\exists! x \in \mathrm{E}$ ».

I.2.2 – Autres notations

On utilise indifféremment les symboles « | », « / » ou une simple virgule « , » pour signifier « tel que » dans une phrase mathématiques.

ATTENTION

Le langage mathématique est un langage à part entière et il convient, en principe, de ne pas le mélanger avec le langage naturel (le français pour nous). Normalement, une phrase mathématique s'écrit de manière isolée sur une ligne (mais on peu parfois faire preuve d'un peu de souplesse).

Exemples

1 ▶ L'énoncé mathématique suivant : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > x$ » signifie « pour tout nombre réel x, il existe un entier naturel n tel que n soit strictement plus grand que x ». Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

B14

2 ▶ Écrivons en langage mathématiques le fait qu'il n'existe aucun réel dont le carré soit égal à -1. Attention le symbole $\nexists$ n'est pas véritablement considéré comme un quantificateur et on ferra en sorte de ne pas l'utiliser.

B15

Exercice A.1

Traduire en langage naturel les énoncés mathématiques suivant puis préciser s'ils sont vrais ou faux :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R}_+,\ x = y^2$

(ii) $\exists x \in \mathbb{R},\ 3x^2 + 1 = x^2 + x$

Exercice A.2

Traduire en langage mathématiques les énoncés suivant (vrais ou faux est bien moins évident pour ***(ii)***) :

(i) La suite de terme général $u_n = n^2$ est bornée.

(ii) Tout entier naturel peut s'écrire comme la somme de quatre carrés d'entiers naturels.

Remarque – On pourra alléger le dernier énoncé mathématique de l'exercice précédent en utilisant la notion de *produit cartésien* de plusieurs ensembles :

- Si E et F sont deux ensembles, le *produit cartésien* de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des *couples* de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.
- Si $E = F$ on notera E^2 au lieu de $E \times E$. Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. Il est donc équivalent d'écrire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
ou bien () :
$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
- Ce que l'on vient de d'évoquer pour des couples fonctionne de la même manière avec des triplets, quadruplets ou n-uplets.

I.3 – Règles de calcul élémentaires

I.3.1 – Proposition (Commutativité de l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$)

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ (et donc dans $\mathbb{R}$) sont *commutatives* ce qui signifie que le résultat de ces deux opérations ne dépend pas de l'ordre des deux éléments. En langage mathématique cela s'écrit :

B16

I.3.2 – Proposition (Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$)

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est en quelque sorte une règle de compatibilité entre ces deux opérations.

(i) Distributivité à gauche :

B17

(ii) Distributivité à droite :

B18

On en déduit facilement que :

B19

Remarque – Utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet de *développer* une expression, c'est-à-dire transformer un produit en somme.

I.3.3 – Factorisation

Factoriser consiste au contraire à transformer une somme en un produit. Cela est en général plus difficile car il faut pouvoir reconnaitre des particularités dans l'expression sur laquelle on travaille.

Méthode A.1

Il n'y a pas de méthode systématique pour factoriser une expression. On peut néanmoins retenir les méthodes suivantes (voir ci-après pour les détails) :

- Utiliser une identité remarquable.
- Dans le cas d'une expression polynomiale, essayer de trouver une *racine évidente* puis procéder à une *division euclidienne polynomiale.*

- Utiliser les formules classiques avec discriminant dans le cas spécifique d'une expression polynomiale de degré 2.
- Utiliser un changement de variable (notamment pour les équations *bicarrés*).

I.3.4 – Proposition (Identités remarquables au carré et au cube)

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \quad (\star)$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

Démonstration de l'identité $(\star)$

B20

Remarque – Attention, a^2+b^2 ne peut pas se factoriser sur $\mathbb{R}$. En revanche cette expression se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme suivante :

B21

(voir le chapitre consacré au nombres complexes).

I.3.5 – Formule du binôme

On vient de voir comment développer $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} a^{n-1}b + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{=n} ab^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} b^n$$

C'est-à-dire :

B22

En échangeant le rôle de a et de b (sachant que $a+b=b+a$) on a aussi :

B23

C'est ce que l'on appelle la formule du binôme de Newton, les coefficients $\binom{n}{k}$ (k parmi n) pouvant se calculer à l'aide du triangle de Pascal :

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Ce triangle se remplit à l'aide de la formule de Pascal que l'on peut schématiser par :

$$\begin{matrix} \bullet & + & \bullet \\ & & \shortparallel \\ & & \bullet \end{matrix}$$

Nous démontrerons cette formule du binôme de Newton dans le chapitre **B**.

I.3.6 – Racine carrée

Tout nombre réel *positif* peut s'écrire comme le carré d'un unique nombre réel positif.

En langage mathématique cela peut s'écrire :

B24

(rappelons que le « ! » précise l'unicité).

Remarques

1 ▶ Cet unique nombre positif y est appelé *racine carrée* de x et on note $y = \sqrt{x}$.

2 ▶ Évidemment on a toujours $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ (mais cela impose à x d'être positif !).

⚠ ATTENTION

> En revanche, si x est un réel de signe *quelconque* on a : $\sqrt{x^2} = |x|$ (valeur absolue de x).

Remarque – Un carré étant toujours positif, il clair qu'un nombre strictement négatif ne peut pas être un carré. Autrement dit un nombre strictement négatif ne possède pas de racine carrée. En langage mathématique cela s'écrit :

B25

Littéralement cela signifie : « un réel strictement négatif x n'est le carré d'aucun réel y ».

I.4 – Équations et systèmes d'équations

I.4.1 – Équations du second degré

On considère une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, l'inconnue x étant réelle. Pour résoudre l'idée est de factoriser cette expression à l'aide d'une identité remarquable :

B26

Si l'on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (appelé discriminant de l'équation) on a donc :

B27

(a) ***Si*** Δ ***est positif*** alors il admet une racine carrée, on a $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ et donc :

B28

Pour conclure on utilise une propriété essentielle de l'ensemble de $\mathbb{R}$: l'*intégrité*. Cette propriété peut s'énoncer de la manière suivante :

B29

En utilisant la notation $\Longleftrightarrow$ (qui signifie « si et seulement si ») on a donc :

B30

Les solutions de l'équation sont donc les deux nombres :

B31

(b) ***Dans le cas particulier où*** $\Delta = 0$ l'équation se résume à :

B32

On a alors une solution « double » qui est le nombre :

B33

(c) ***Si*** Δ ***est strictement négatif***, on a alors :

B34

Cette expression ne s'annule donc pour aucune valeur réelle de x ce qui signifie que l'équation n'a ***aucune solution réelle***. En revanche elle possède dans ce cas ***deux solutions complexes conjuguées*** (voir le chapitre sur les nombres complexes).

I.4.2 – Relation entre coefficients et racines d'une équation polynomiale de degré 2

Que l'on soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, supposons que l'on dispose d'une fonction polynomiale de degré 2 que l'on sait écrire de manière développée et de manière factorisée :

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

En développant l'expression factorisée on obtient :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

Un théorème que nous verrons plus tard (principe d'identification) affirme que si deux expressions polynomiales sont égales, alors elles ont les mêmes coefficients, degré par degré. D'où, après petit calcul :

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exercice A.3

Factoriser dans $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes :

(i) $\mathrm{A}(x) = x^4 + 3x^2 + 2$

(ii) $\mathrm{B}(x) = x^4 + x^2 + 1$

(iii) $\mathrm{C}(x) = x^3 + x^2 + x - 3$

(iv) $\mathrm{D}(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$

Méthode A.2

Avant de résoudre une équation, on commence ***TOUJOURS*** par étudier l'ensemble de résolution c'est-à-dire le plus grand ensemble sur lequel les différentes expression de l'équations sont bien définies.
En fin de résolution, il apparait parfois des « fausses solutions » qui n'appartiennent pas à l'ensemble de résolution.

Exercice A.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(i) $\dfrac{x\sqrt{x-2}}{x-3} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

(ii) $\sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5$

(iii) $\dfrac{6x-1}{4x-1} = \dfrac{3x+1}{2x-5}$

(iv) $x = |2x + 5|$

I.4.3 – Équations contenant des racines carrées

Le principe général est qu'il faut ***absolument*** s'occuper des questions de ***signes***.

Méthode A.3

Pour résoudre une équation comportant une (ou plusieurs) racine carrée :

- on commence par s'occuper des questions d'ensemble de résolution ;
- on peut précéder par élévation au carré, *ce qui peut introduire des « fausses solutions »* puis effectuer une vérification ;
- on peut procéder par équivalences successives à condition de s'occuper à chaque étape des questions de signes ;
- on peut isoler une racine d'un coté de l'équation afin de l'élever au carré (en faisant toujours attention aux signes).

Exercice A.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$.

Exercice A.6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x + 1 = \sqrt{-x^2 + 5}$.

I.4.4 – Systèmes d'équations linéaires

Pour résoudre un système linéaire de taille supérieure ou égale à 3, on utilise en général la méthode consistant à combiner les équations pour éliminer successivement des inconnues, le but étant d'obtenir un système *triangulaire* (ou plus généralement *échelonné*). On termine le calcul en résolvant en partant de la dernière équation et en remontant jusqu'à la première.

Méthode A.4

La méthode systématique (avec tous les détails) sera étudiée dans un chapitre ultérieur. Pour le moment, nous nous contentons de décrire cette méthode en résolvant l'exercice suivant.

Exercice A.7

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant :

$$(S)\ \begin{cases} x+2y+3z=14 \\ -2x+2y+z=-5 \\ 3x+2y+3z=20 \end{cases}$$

Solution

*À écrire dans votre document annexe (classeur ou cahier) relatif au chapitre **A**.*

La méthode présentée dans l'exercice précédent est appelée méthode du ***pivot de Gauss*** et permet de transformer tout système linéaire en un système triangulaire *équivalent*. Le terme *équivalent* signifie ici que le système obtenu admet exactement les mêmes solutions que le système initial.

Résumons les opérations valides qui permettent d'obtenir un système équivalent au système précédent :

— échange de la i^{e} et de la j^{e} ligne : $L_i \leftrightarrow L_j$, pour $i \neq j$;

— multiplication de la i^{e} ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$, pour $\alpha \neq 0$;

— ajout d'un multiple de la j^{e} ligne à la i^{e} ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, pour $i \neq j$ mais λ quelconque.

Exercice A.8

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, obligatoirement par la *méthode du pivot de Gauss*, le système linéaire suivant :

$$(S)\ \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 3 \\ 3x+3y+z & = & 2 \\ x+y+5z & = & 1 \end{array} \right.$$

II – Inégalités et inéquations dans $\mathbb{R}$

II.1 – Inégalités

II.1.1 – Généralités

On rappelle que la notation $a \leqslant b$ signifie que le nombre réel a est inférieur ou égal au réel b. La notaion $a < b$ signifie que le nombre réel a est strictement inférieur au réel b. On dispose également des relations « supérieur ou égal » et « strictement supérieur ».

Cette ***relation d'ordre*** $\leqslant$ possède les propriétés suivantes.

a) Réflexivité
Pour tous réels a on a $a \leqslant a$. Par exemple l'énoncé mathématiques $2 \leqslant 2$ est exact. Le nombre 2 est en effet *inférieur ou égal* à 2 puisque qu'il est *égal* à 2.

b) Transitivité
Pour tous réels a, b, c, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$

c) Antisymétrie
Pour tous réels a et b, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ alors $a = b$.

Remarques

1 ▶ En langage mathématique, la réflexivité s'écrit :

B35

2 ▶ Afin d'écrire les autres propriétés en langage mathématiques, il faut introduire la notion d'*implication logique*. Si P et Q sont deux énoncés mathématiques (le terme exact est *propositions*) alors la notation P ⇒ Q, qui se lit « P implique Q » signifie que Q est une conséquence logique de P. Par exemple la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 6 \mid n \Rightarrow 2 \mid n$$

signifie que si un entier naturel n est divisible par 6, alors il est divisible par 2. Cette proposition est bien entendu vraie.

3 ▶ La transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ peut donc s'écrire

B36

et l'antisymétrie :

B37

II.1.2 – Compatibilité avec l'addition

Si $a \leqslant b$ alors pour tout nombre réel c on a $a + c \leqslant b + c$, autrement dit

B38

On en déduit que l'on peut ajouter deux inégalités : si $a \leqslant b$ et $x \leqslant y$ alors $a + x \leqslant b + y$. En langage mathématique cela s'écrit :

B39

En revanche ***on ne peut pas soustraire deux inégalités***. On a par exemple :

B40

Plus généralement si l'on dispose de nombre réels $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ tels que :

B41

alors on a :

B42

II.1.3 – Compatibilité avec la multiplication

Soit a et b deux nombres réels vérifiant $a \leqslant b$. Si $c \geqslant 0$ alors $ac \leqslant bc$ et si $c \leqslant 0$ alors $ac \geqslant bc$. En langage mathématique cela s'écrit :

B43

En général ***on ne peut pas multiplier deux inégalités !*** On a par exemple :

B44

Mais cela est possible si les nombres sous ***tous positifs*** :

B45

Plus généralement si l'on dispose de nombres réels ***tous positifs*** $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ tels que :

B46

alors on a :

B47

II.1.4 – Passage à l'inverse

Si a et b sont deux nombre réels ***non nuls*** et de ***même signe*** tels que $a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

En langage mathématique :

B48

Cela est faux si les nombres sont de ***signes différents***. Par exemple :

B49

Attention, ***on ne peut pas diviser membre à membre des inégalités***. Par exemple :

B50

Méthode A.5

Pour démontrer une inégalité on peut utiliser une des méthodes suivantes (liste non exhaustive) :

- Pour démonter une inégalité de la forme $a \leqslant b$ il est équivalent de démontrer que $b - a \geqslant 0$. Pour cela on peut factoriser l'expression $b - a$ et faire une étude du signe de chaque facteur.
- Pour démontrer une inégalité, il peut parfois être judicieux de faire apparaitre une identité remarquable et utiliser, par exemple, le fait qu'un carré de réel est toujours positif.
- Pour démontrer une inégalité de la forme $a(x) \leqslant b(x)$ où x est une variable réelle appartenant à un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, on peut faire l'étude des variations (et ensuite du signe) sur I de la ***fonction différence*** $f : x \longmapsto b(x) - a(x)$.

Exercice A.9

Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

Exercice A.10

Montrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice A.11

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
2. Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité ?
3. Illustrer et interpréter cette inégalité graphiquement.

Méthode A.6

Pour résoudre une inéquation on peut utiliser une des méthodes suivantes (liste non exhaustive) :

- Pour résoudre une inéquation de la forme $a(x) \leqslant b(x)$ on peut factoriser $b(x) - a(x)$ et faire une étude de signe que l'on présente sous la forme d'un tableau.
- Dans le cas particulier d'une inéquation polynomiale de degré 2 il faut se souvenir que l'expression $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'*extérieur* des racines (s'il y en a) et du signe opposé à l'intérieur des racines.
- Pour résoudre une inéquation de la forme $a(x) \leqslant b(x)$ on peut également faire l'étude des variations (et ensuite du signe) de la ***fonction différence*** $f : x \longmapsto b(x) - a(x)$.

Exercice A.12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(i) $(x+5)(2x-1) \leqslant (3x-7)(2x-1)$ ***(ii)*** $\dfrac{(5x-2)(3x+4)}{(5-4x)(x+2)} \geqslant 0$ ***(iii)*** $\dfrac{x+5}{x-2} < \dfrac{x-4}{x+3}$

Méthode A.7

- Pour encadrer $a - b$ *sans soustraire des inégalités*, on encadre a, puis $-b$ et on ajoute ces deux encadrements.
- Pour encadrer un quotient $\frac{a}{b}$, il faut faire attention de ne travailler qu'avec des *nombres positifs* (ou tous négatifs).
- Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leur carré. En effet les carrés et les racines carrés de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que les deux nombres initiaux.

Exemples

1 ▶ Sachant que $2 \leqslant a \leqslant 4$ et $3 \leqslant b \leqslant 10$, cherchons un encadrement de $\dfrac{a}{b}$.

B51

2 ▶ Comparons les deux nombres $a = 17$ et $b = 12\sqrt{2}$.

B52

II.2 – Valeur absolue

II.2.1 – Définition

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose :

B53

II.2.2 – Proposition (Propriétés élémentaires)

(i) Pour tout réel a on a $|a| \geqslant 0$.

(ii) Pour tout réel a, on a $|a| = 0$ si et seulement si $a = 0$.

(iii) Pour tous réels a et b, $|a| = |b|$ si et seulement si $a = \pm b$.

(iv) Pour tous réels a, b on a $|ab| = |a||b|$ et si $b \neq 0$ $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

II.2.3 – Proposition (Inégalités triangulaires)

(i) Première inégalité triangulaire : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |a+b| \leqslant |a|+|b|$

(ii) Seconde inégalité triangulaire : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$

Démonstration

(i) Première inégalité triangulaire

B54

(ii) Seconde inégalité triangulaire

B55

Remarque – Plus généralement, on peut démontrer par récurrence que si $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels alors :

B56

II.2.4 – Interprétation géométrique

Si l'on représente $\mathbb{R}$ comme une droite (ce qui est très fréquent) la distance entre deux réels a et b vaut $|a-b|$.

Cette remarque permet par exemple de retenir facilement que les nombres réels x vérifiant $|x-a| \leqslant \varepsilon$ sont exactement les réels de l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Cela est fondamental en analyse pour bien comprendre les notions de limite, de continuité et de dérivabilité.

B57

Méthode A.8

Pour résoudre des équations ou des inéquations dans laquelle figurent des valeurs absolues on peut séparer l'étude en plusieurs cas, en fonction du signe des expressions figurant dans les valeurs absolues.

Exercice A.13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2 + |x| \geqslant 3x + 1$.

Indication – *Pour supprimer la valeur absolue on séparera les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, autrement dit on résoudra l'inéquation séparément sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.*

Exercice A.14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(i) $|4x+1| \geqslant 2$

(ii) $|3x-2| \leqslant x+1$

Fin du chapitre