Chapitre

C

Cours et exercices

Fonctions usuelles – Consolidations des acquis

Le but de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les connaissances acquises au lycée concernant les fonctions d'une variable réelle.
L'accent est volontairement mis sur les aspects pratiques (dérivation, étude de limite, *etc.*), les considérations plus théoriques seront étudiées plus tard dans l'année.
Le partie **III** est un catalogue de fonctions usuelles que nous enrichirons encore un peu plus dans le chapitre suivant.

Sommaire

I - Généralités sur les fonctions

N-B Les ensembles sur lesquels nous allons travailler seront la plupart du temps des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ mais la présentation est faite dans un contexte plus général.

I.1 - Notion de fonction

I.1.1 – Définition (intuitive)

Soit E et F deux ensembles. Une fonction (ou application) f de E dans F est un moyen d'***associer*** à chaque élément x de E un ***unique élément*** de F appelé son ***image*** par f et qui est noté $f(x)$.

On dit que E est l'***ensemble de départ*** de f (ou son *ensemble de définition*) et que F est son ***ensemble d'arrivée***.

Remarques

1 ▶ Très souvent, une fonction est définie à l'aide d'une formule permettant d'exprimer $f(x)$ *en fonction* de x. Par exemple, la fonction f qui à tout réel x associe le réel x^3+1 est notée :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^3+1\end{array}$$

2 ▶ La donnée des ensembles de départ et d'arrivée, fait partie de la définition d'une fonction. Par exemple, les fonctions :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array} \quad \text{et} \quad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}$$

sont différentes car elles n'ont pas le même ensemble de départ.

3 ▶ Si f est une fonction de E dans F et que A est une partie (ou sous-ensemble) de E, on appelle restriction de f à A la fonction :

$$f_{|\mathrm{A}}:\begin{array}{ccc}\mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{F}\\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}$$

La fonction $f_{|\mathrm{A}}$ fait bien sûr « la même chose » que f. Elle n'a simplement pas le même ensemble de départ.

Cela a de l'importance car une fonction et ses restrictions peuvent avoir des propriétés globales différentes. Dans l'exemple qui précède f n'est pas une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, mais $g=f_{|\mathbb{R}_+}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4 ▶ Il est fondamental de comprendre la différence entre f et $f(x)$. La notation $f(x)$ désigne l'élément de F résultant de l'*application* de f à x. Alors que la notation f désigne la fonction elle même.

5 ▶ Il est fréquent que l'ensemble de départ ne soit pas donné lors d'un exercice et que la première question consiste à le déterminer (dans ce cas on cherche le plus grand possible).

6 ▶ L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ou F^{E}.

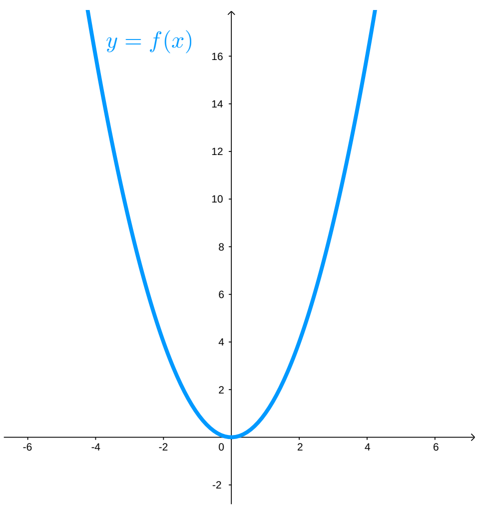
I.1.2 – Définition (Graphe d'une fonction)

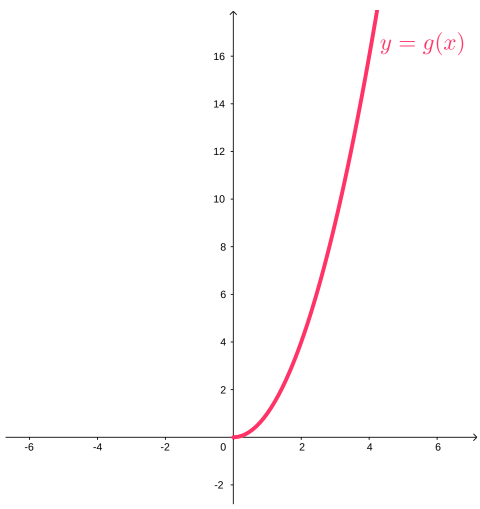
À toute fonction $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ est associée son ***graphe***, qui est un sous-ensemble de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$:

$$\mathscr{C}_f=\left\{\left(x,f(x)\right),x\in\mathrm{E}\right\}$$

Remarque – Dans le cas où E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, il est possible de dessiner le graphe de f (on parle aussi de courbe représentative) en munissant le plan d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

Exemple – Les graphes des fonctions $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}$ sont par exemples les suivants :





I.1.3 – Définition (Image et antécédent(s))

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction.

(i) Pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'élément $f(x)$ est appelé ***l'image*** de x par f.

(ii) Pour tout $y \in \mathrm{F}$, tout élément x de E vérifiant $y = f(x)$ est appelé ***un antécédent*** de y par f.

Remarques

1 ▶ Un élément x de E a toujours une image (et une seule). Dans le cas où E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela signifie graphiquement qu'il y a un unique point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant x comme abscisse.

B1

Inversement, si une courbe du plan possède plusieurs points pour une même abscisse, on peut affirmer qu'il ne s'agit **pas** de la courbe d'une fonction (par exemple un cercle).

2 ▶ Pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'ensemble des antécédents de y par f sont précisément les solutions dans E de l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x).

3 ▶ Un élément de F peut ne pas avoir d'antécédent ou en avoir plusieurs.

B2

I.1.4 – Définition (Image et « tiré en arrière » d'une partie)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction.

(i) Si A est une partie de E on appelle ***image*** de A par f l'ensemble des images de tous les éléments de A :

$$f(\mathrm{A}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ f(x),\ x \in \mathrm{A} \right\} = \left\{ y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{A},\ y = f(x) \right\}$$

(ii) Si B est une partie de F on appelle ***tiré en arrière*** de B par f l'ensemble des antécédents des éléments de B. Autrement dit, c'est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B :

$$f^{\leftarrow}(\mathrm{B}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{B} \right\}$$

ATTENTION

La notation officielle pour $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$ est $f^{-1}(\mathrm{B})$ et le vocabulaire n'est pas « tiré en arrière de B par f » mais « image réciproque de B par f ». La notation et le vocabulaire officiel est, d'expérience, une source de confusions et d'erreurs ***absolument désastreuse***. Nous y reviendrons quand nous parlerons de *bijections* et de *réciproque d'une bijection*.

B3

Remarques

1 ▶ L'ensemble de toutes les valeurs possibles de f, c'est à dire $f(\mathrm{E})$ est parfois appelée image de f et est notée $\mathrm{Im}(f)$. On a bien sûr $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{F}$, mais il se peut que certains éléments de F ne soit pas dans $\mathrm{Im}(f)$ (ils ne sont pas *atteints* par la fonction).

2 ▶ Ainsi, $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$ est l'ensemble des antécédents de tous les éléments de B. En particulier, pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'ensemble $f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$ est exactement l'ensemble des antécédents de l'élément y.

I.2 - Opérations sur les fonctions

I.2.1 – Définition (Opérations algébriques)

Si F est muni d'une opération $\star$, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est naturellement muni d'une opération associée que l'on note (abusivement!) de la même manière :

$$f \star g : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \star g(x) \end{array}$$

Remarques

1 ▶ Autrement dit, pour tout $x \in \mathrm{E}$ on a :

$$(f \star g)(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) \star g(x)$$

2 ▶ Dans le cas particulier où F est une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ est donc muni d'une addition, d'une soustraction et d'une multiplication. Pour la division de deux fonctions, il y a bien sûr une condition : que la fonction, située au dénominateur ne soit jamais nulle.

I.2.2 – Définition (Composition)

Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$. On appelle ***composée*** de u et f la fonction $f \circ u$ définie sur E par :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ f \circ u(x) \overset{\text{déf}}{=} f\big(u(x)\big)$$

Remarques

1 ▶ On peut représenter la composition à l'aide du schéma suivant :

B4

2 ▶ Pour que $f \circ u$ soit bien définie, il est essentiel que l'ensemble de départ de f contienne l'ensemble d'arrivée de u (dans la définition adoptée ici ces ensembles sont même égaux).

3 ▶ Même si $f \circ u$ est bien définie il se peut que $u \circ f$ ne le soit pas.

Exemple :

B5

4 ▶ Même si les deux composées $f \circ u$ et $u \circ f$ sont bien définies, il se peut que $f \circ u \neq u \circ f$. La composition n'est donc pas une opération commutative.

Exemple :

B6

5 ▶ Il arrive assez souvent, en exercice, qu'une fonction soit donnée comme une composée $g = f \circ u$ sans que son ensemble de définition soit précisé.
Pour déterminer celui-ci on peut écrire :

$$g(x) = f\big(u(x)\big) \text{ est bien défini} \iff \begin{cases} x \text{ est dans l'ensemble de définition de } u \\ \quad \textbf{ET} \\ u(x) \text{ est dans l'ensemble de définition de } f \end{cases}$$

Exercice C.1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)}$$

I.3 - Propriétés éventuelles d'une fonction

Attention – Nous nous limitons ici aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Nous allons passer en revue certaines propriétés que peut avoir une telle fonction.

I.3.1 – Définition (Parité)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ supposée ***symétrique par rapport à*** 0, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ -x \in \mathrm{A}$$

(i) On dit que $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est ***paire*** si :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(-x) = f(x)$$

(ii) On dit que f est ***impaire*** si :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(-x) = -f(x)$$

Remarques

1 ▶ Si f est une fonction paire, alors l'axe $(\mathrm{O}y)$ est axe de symétrie du graphe de f.

2 ▶ Si f est une fonction impaire, alors le centre du repère O un centre de symétrie du graphe de f.

3 ▶ Une fonction peut n'être ni paire, ni impaire. Exemple :

B7

4 ▶ Si f est une fonction impaire définie en 0 alors on a obligatoirement $f(0) = 0$. En effet :

B8

I.3.2 – Définition (Périodicité)

Soit $\mathrm{T} > 0$ et A une partie de $\mathbb{R}$ supposée ***stable par addition*** par T c'est à dire :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ x + \mathrm{T} \in \mathrm{A}$$

On dit que $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est T-***périodique*** si :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(x + \mathrm{T}) = f(x)$$

Remarques

1 ▶ Si T est une période de f alors 2T, 3T et plus généralement $k\mathrm{T}$ ($k \in \mathbb{Z}$) sont aussi des périodes de f.

2 ▶ Pour étudier une fonction T-périodique $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ on peut se limiter à faire une étude sur $\mathrm{A} \cap [0, \mathrm{T}]$ ou $\mathrm{A} \cap \left[-\frac{\mathrm{T}}{2}, \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$.

3 ▶ La *pulsation* d'une fonction T-périodique est le nombre $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$.

Exemple – Les fonctions $x \mapsto \cos(\omega t)$ et $x \mapsto \sin(\omega t)$ sont $\dfrac{2\pi}{\omega}$-périodiques.

I.3.3 – Définition (Monotonie)

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f est ***croissante*** (on précise parfois *au sens large*) si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{A}^2,\ \ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

(ii) On dit que f est ***strictement croissante*** si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{A}^2,\ \ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

(iii) On définit de même les notions de fonctions ***décroissantes*** et ***strictement décroissantes***.

(iv) On dit qu'un fonction est ***monotone*** (resp. ***strictement monotone***) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Remarques

1 ▶ La somme de deux fonctions croissantes est croissantes.

2 ▶ En général, le produit de deux fonctions croissantes n'est pas une fonction croissante (c'est vrai pour des fonctions positives).

Exercice C.2 (Composée de deux fonctions croissantes)

> Si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ sont deux fonctions croissantes (A, B et C étant des parties de $\mathbb{R}$), démontrer que la fonction composée $g \circ f : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ est également croissante.

Remarque – Plus généralement la composée de deux fonctions (strictement) monotones de même sens de variation est une fonction (strictement) croissante. De manière analogue la composée de deux fonctions (strictement) monotones de sens de variation opposé est une fonction (strictement) décroissante.

I.3.4 – Définition (Fonction minorée, majorée, bornée)

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f est ***majorée*** sur A s'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}$$

Un tel réel M est appelé un ***majorant*** de f.

(ii) On dit que f est ***minorée*** sur A s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ m \leqslant f(x)$$

Un tel réel m est appelé un ***minorant*** de f.

(iii) On dit que f est ***bornée*** si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque – D'un point de vue géométrique, f est majorée par M signifie que $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de la droite horizontale d'équation $y = \mathrm{M}$. De même, f est minorée par m signifie que cette courbe $\mathscr{C}_f$ reste au dessus de la droite horizontale d'équation $y = m$.

B9

Exemple – La fonction sin est bornée entre -1 et 1. Le réel $\mathrm{M} = 2$ est aussi un majorant de sin. Mais d'une part la valeur 2 n'est pas atteinte par la fonction sin et d'autre part $\mathrm{M} = 2$ n'est pas le plus petit majorant possible (c'est une majoration « grossière »).

Exercice C.3

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$.
Démontrer que f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

I.3.5 – Définition (Maximum, Minimum, Extremum)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$.

(i) On dit que f admet un ***maximum*** en a si :

$$\forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(a)$$

On dit alors que $f(a)$ est ***le maximum*** de f sur A et on note :

$$f(a) = \max_{x \in A} f(x)$$

(ii) On dit que f admet un ***minimum*** en a si :

$$\forall x \in A,\ f(a) \leqslant f(x)$$

On dit alors que $f(a)$ est ***le minimum*** de f sur A et on note :

$$f(a) = \min_{x \in A} f(x)$$

(iii) On dit que f admet un ***extremum*** en a si elle admet en ce point un maximum ou un minimum.

Remarques

1 ▶ L'étude des variations d'une fonction (résumée dans un tableau) peut permettre de repérer d'éventuels extrémums.

2 ▶ Un extremum peut être atteint plusieurs fois.

3 ▶ Une fonction f possède un maximum si et seulement si elle possède un majorant qui est une valeur atteinte par la fonction f.

4 ▶ Une fonction majorée, peut ne pas avoir de maximum. De même une fonction minorée peut ne pas avoir de minimum.

Exemple – Analysons la courbe suivante :

B10

II - Dérivation

II.1 - Dérivabilité

II.1.1 – Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I et f une fonction définie sur I.

(i) On dit que f est ***dérivable*** en a si la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & \mathrm{I}\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

(appelée taux d'accroissement au point a) possède une limite **finie** en a.

(ii) Dans ce cas, cette limite finie est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

(iii) On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas la ***fonction dérivée*** de f est la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f' : & \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}.$$

Remarque – Nous noterons $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I (à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Exemple – Étudions la dérivabilité de la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$.

B11

II.1.2 – Interprétation géométrique

Si A et X sont les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse respectives a et x, on constate que $\tau_a(x)$ est la ***pente*** de la droite (AX).

L'existence d'une limite pour $\tau_a(x)$ signifie l'existence d'une ***position limite*** pour la droite (AX) lorsque x tend vers a. Le fait que cette limite soit ***finie*** signifie que cette position limite n'est ***pas verticale*** (en cas de dérivabilité). Cette droite limite (si elle existe), est appelée ***tangente*** à la courbe de f au point d'abscisse a.

B12

En cas d'existence, la tangente au point d'abscisse a a pour pente $f'(a)$ et comme elle passe par le point de coordonnées $\left(a, f(a)\right)$ elle a pour équation cartésienne :

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)\left(x-a\right)}.$$

Démonstration (pour l'équation de la tangente)

B13

Remarques

1 ▶ Si on constate l'existence d'une ***tangente verticale*** à la courbe d'une fonction cela implique que cette fonction n'est ***pas*** dérivable au point correspondant.

2 ▶ À ce stade de l'année, nous n'avons pas encore revue la notion de ***continuité***. Mais vous pouvez déjà avoir en tête que :

- intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe peut être tracée, « ***sans lever le crayon*** » (autrement dit, si elle ne présente pas de « saut ») ;
- ***la dérivabilité implique la continuité*** mais ***la réciproque est fausse*** (un des exemples les plus simples est celui de la fonction racine carrée en 0).

II.2 - Règles de calcul

II.2.1 – Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables)

Soit $(f,g) \in \mathscr{D}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) La fonction λf est dérivable et on a :
$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

(ii) La fonction $f+g$ est dérivable et on a :
$$(f+g)' = f' + g'$$

(iii) La fonction fg est dérivable et on a :
$$(fg)' = f'g + fg'$$

(iv) La fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et on a :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

II.2.2 – Proposition (Dérivation composée)

Soit $u \in \mathscr{D}(\mathrm{I},\mathrm{J})$ et $f \in \mathscr{D}(\mathrm{J},\mathbb{R})$. Alors la fonction composée $f \circ u$ est dérivable sur I et on a :
$$\forall x \in \mathrm{I},\ \ (f \circ u)' = u' \times f' \circ u$$

Remarque – La formule de dérivation composée généralise plusieurs résultats du lycée :

$$\big(\sin(u)\big)' = u'.\cos(u) \qquad \big(\cos(u)\big)' = -u'.\sin(u) \qquad \big(\exp(u)\big)' = u'.\exp(u) \qquad \big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u} \qquad \big(\sqrt{u}\big)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

✎ Exercice C.4

Sans se soucier de son ensemble de définition, ni même de son ensemble de dérivabilité (ce qu'il faudrait ***évidemment*** faire dans le cadre d'une étude complète) calculer la dérivée de la fonction : $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right)$.

✎ Exercice C.5

Sans se soucier des ensemble de définitions, ni même des ensembles de dérivabilité, (ce qu'il faudrait ***évidemment*** faire dans le cadre d'études complètes), calculer les dérivées des fonctions données par :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2. $g(x) = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$

3. $h(x) = \cos^3(x) - 5\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

4. $\varphi(x) = \sqrt{5x^2 + \ln(x)}$

5. $\psi(x) = \cos\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$

6. $\theta(x) = (2-3x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

II.2.3 – Définition (Dérivées successives)

Sous réserve d'existence, les dérivées successives de $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ sont définies par :
$$f^{(0)} = f$$
$$f^{(1)} = f'$$
$$f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)' \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Remarque – On note généralement $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et $f^{(3)} = f'''$.

Exercice C.6

Calculer les dérivées successives $f^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(3-2x)$.
Indication – *Calculer les premières dérivées, conjecturer une formule générale, puis la démontrer par récurrence.*

II.2.4 – Définition (Dérivabilité d'une fonction complexe)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$.
On dit que f est dérivable si les fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables. Dans ce cas la dérivée de f est la fonction :

$$f' \overset{\text{déf}}{=} \Big(\mathrm{Re}(f)\Big)' + \mathrm{i}\Big(\mathrm{Im}(f)\Big)'$$

Remarques

1 ▶ On peut démontrer que la dérivation des fonctions à valeurs complexes se fait exactement avec les même règles de calcul.

2 ▶ En particulier, si $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est dérivable, la fonction $\exp(\varphi) = \exp \circ \varphi$ est dérivable et on a : $\big(\exp(\varphi)\big)' = \varphi' \times \exp(\varphi)$.

II.3 - Applications de la dérivation

II.3.1 – Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) La fonction f' est nulle si et seulement si f est constante.

(ii) La fonction f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I.

(iii) La fonction f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur I.

(iv) Si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

(v) Si $f' < 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarques

1 ▶ Cette caractérisation des fonctions constantes n'est vrai que sur un intervalle (faux sinon).

2 ▶ Il est important de préciser dans ***(iv)*** et ***(v)*** que f' peut s'annuler en un nombre fini de points. L'exemple le plus simple est sans doute la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 où elle s'annule. Cette fonction f est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Méthode C.1 (Plan d'étude d'une fonction)

S'il est demandé de faire ***l'étude complète*** d'une fonction cela signifie :

- trouver son ensemble de définition en la décomposant (opérations algébriques ou composition) en fonctions plus simples ;
- réduire éventuellement l'ensemble d'étude en remarquant que la fonction est paire, impaire ou périodique ;
- se demander si elle est dérivable (par exemple si c'est une somme, produit et/ou composée de fonctions dérivables connues) ;
- faire le calcul de sa dérivée (éventuellement l'ensemble de dérivabilité peut être plus petit que l'ensemble de définition) ;
- factoriser l'expression de la dérivée (mise au même dénominateur, recherche de racines évidentes, *etc.*) ;
- dresser un tableau de variation en précisant les valeurs particulières (annulation de la dérivée) ;
- compléter le tableau de variation en précisant les valeurs ou limites aux points remarquables ;
- étudier la présence d'asymptotes et préciser leur nature ;
- effectuer un tracé (une ébauche approximative sera souvent suffisante, sauf mention contraire).

Exercice C.7

Étudier et tracer les courbes représentatives des fonctions définies par :

1. $f(x) = x^3 - 3x + 4$

2. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 7}{2x + 3}$

Méthode C.2 (Asymptote obliques)

On dit que la courbe d'une fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $\pm\infty$ si $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 en $\pm\infty$. Pour identifier la présence éventuelle d'une telle asymptote on réalise l'étude suivante :

(i) on commence par étudier si $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite ***finie*** a en $\pm\infty$;

(ii) ***si c'est le cas***, on étudie si $f(x) - ax$ admet une limite ***finie*** b en $\pm\infty$;

(iii) ***si c'est le cas*** on peut affirmer que la droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$.

Exercice C.8

On considère la fonction f de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 1}\right)$$

1. Étudier les variations de f. En déduire que f possède un minimum atteint en un unique point α (on ne cherchera pas à calculer $f(\alpha)$).

2. Étudier la limite de f en $-\infty$. En déduire la présence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f dont on précisera la nature.

3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

4. Étudier la présence éventuelle d'une asymptote oblique en $+\infty$ (auquel cas on donnera son équation cartésienne).

5. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ de f et de ses asymptotes. On montrera en particulier que les deux asymptotes se croisent en un point de la courbe.

6. Donner l'allure de la courbe.

III - Premier catalogue de fonctions usuelles

III.1 - Fonctions puissances (exposants entiers)

III.1.1 – Définition (Puissances entières d'un réel)

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle puissance n-ième du réel x le nombre :

$$x^n \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, par convention : $x^0 = 1$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$x^{-n} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

Remarques

1 ▶ La convention du point ***(ii)*** (c'est à dire pour $n = 0$) correspond au cas d'un « produit vide », auquel il est pratique de donner comme valeur conventionnelle l'élément neutre de la multiplication, c'est à dire le nombre 1.

2 ▶ Cette règle reste valable pour $x = 0$ et donne le controversé $0^0 \overset{\text{déf}}{=} 1$.
Attention, cette convention n'est pas unanimement acceptée.

III.1.2 – Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur son ensemble de définition ($\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$) et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$

Démonstration dans le cas $n \geqslant 1$

B14

III.1.3 – Variations et graphe de $x \mapsto x^n$

B15

n pair $\geqslant 2$ n impair $\geqslant 1$

B16

n pair $\leqslant -2$ n impair $\leqslant -1$

III.2 - Fonction racine carrée

III.2.1 – Définition (Racine carrée)

(1) On rappelle que la racine carrée d'un nombre réel ***positif*** x est l'unique nombre réel y tel que $y^2 = x$ et que l'on note $y = \sqrt{x}$.

(2) La ***fonction racine carrée*** est la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

III.2.2 – Proposition

La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et son graphe présente en 0 une demi-tangente verticale. Par ailleurs, sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

III.2.3 – Variations et graphe de la fonction racine carrée

La dérivée de cette fonction étant strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, cela permet d'affirmer qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (d'après le théorème **II.3.1**).

Sa représentation graphique est la suivante :

B17

III.3 - Fonction valeur absolue

III.3.1 – Définition (Valeur absolue d'un réel)

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} = \max(x, -x).$

Le graphe de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est le suivant :

B18

III.3.2 – Proposition

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sur $\mathbb{R}_-^*$ sa dérivée est la constante -1 et sur $\mathbb{R}_+^*$ c'est la constante 1.

Elle n'est pas dérivable en 0 (dérivée à droite différente de la dérivée à gauche en ce point).

III.4 - Fonctions polynomiales

III.4.1 – Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une application $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *polynomiale* de degré n s'il existe $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$.

Exemples

1 ▶ L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$$

est polynomiale de degré 3.

2 ▶ Si p est une fonction polynomiale de degré 0 alors il existe $a_0 \neq 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = a_0$. Ainsi, p est une fonctions constante **non nulle**.

3 ▶ On convient que l'application nulle est aussi polynomiale (de degré $-\infty$).

4 ▶ L'application

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

est polynomiale de degré 1.

III.4.2 – Proposition

Les fonctions polynomiales sont continues et dérivables (une infinité de fois) sur $\mathbb{R}$.

Remarques

1 ▶ Notons que si p est définie par $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ alors $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$. De manière générale la dérivée d'une fonction polynomiale est polynomiale.

2 ▶ Si p est une fonction polynomiale de degré n dont le ***coefficient dominant*** (celui du terme de plus haut degré) est noté a_n, alors la dérivée n-ième de p est constante et vaut $n! a_n$.
Sa dérivée $(n+1)$-ième et toute les suivantes sont nulles.

III.4.3 – Théorème (principe d'identification, version faible)

(i) Soit $a_0, ..., a_n$ des nombres réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0$$

Alors tous les coefficients sont nuls *i.e.* $\forall i \in [\![0, n]\!], a_i = 0$.

(ii) Soit $a_0, ..., a_n$ et $b_0, ..., a_k$ des nombre réels avec $a_n \neq 0$ et $b_k \neq 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = b_0 + b_1 x + ... + b_k x^k$$

alors $n = k$ et $\forall i \in [\![0, n]\!], a_i = b_i$.

Résultat admis à ce stade de l'année.

Remarques

1 ▶ Ce théorème permet d'affirmer que l'écriture d'une fonction polynomiale sous la forme $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$ est unique.

2 ▶ On en déduit également qu'une fonction polynomiale ne peut pas être de degré n **et** de degré k avec $n \neq k$. On peut donc parler *du* degré d'un fonction polynomiale que l'on note $\deg(p)$.

3 ▶ Ce principe d'identification reste vrai si au lieu de « $\forall x \in \mathbb{R}$ » on a « $\forall x \in \mathrm{I}$ » où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle (et donc contenant une infinité de nombres réels).

III.4.4 – Proposition (Factorisation à l'aide d'une racine)

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale.

(i) On dit que a est une racine de p si $p(a) = 0$.

(ii) Si a est une racine de p alors il existe une fonction polynomiale q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = (x-a)q(x)$$

La démonstration de ce résultat sera faite plus tard dans l'année.

III.5 - Fonctions rationnelles

III.5.1 – Définition

On dit qu'une fonction est ***rationnelle*** si elle est le quotient de deux fonctions polynomiales.

Exemple – La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x^7 - x^3}{1+x^2} \end{array}$ est une fonction rationelle.

III.5.2 – Proposition

(i) Soit p et q deux fonctions polynomiales. Alors la fonction rationnelle $f = \dfrac{p}{q}$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{\text{racines de } q\}$.

(ii) Les fonctions rationnelles sont continues et dérivables (une infinité de fois) sur leur ensemble de définition.

Exemple – La fonction rationnelle donnée par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2-1}$ n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Remarques

1 ▶ La dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle.

2 ▶ Les fonctions rationnelles peuvent se décomposer en « ***éléments simples*** ». La théorie générale de cette décomposition est hors programme et un énoncé portant sur ce sujet comportera toujours une indication.

Exercice C.9

1. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}, \quad \frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}$$

2. Calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x-7}{x^2+x-6}\, \mathrm{d}x$$

III.6 - Fonctions exponentielle et logarithme népérien

III.6.1 – Généralités sur les fonctions exponentielle et logarithme népérien

Voir formulaire.

III.6.2 – Proposition (Croissances comparées « élémentaires »)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Démonstration

B19

III.6.3 – Proposition (D'autres limites à connaître *absolument*)

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Démonstration (très contestable...)

B20

III.7 - Fonctions sinus et cosinus

III.7.1 – Cosinus et sinus d'un nombre réel

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ notons M_θ le point du cercle de centre O et de rayon 1 (le *cercle trigonométrique*) tel que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM_\theta}\right)$ ait pour mesure θ (en radians, à 2π près).

B21

Par définition $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ sont les coordonnées du point M_θ dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

III.7.2 – Trigonométrie

Voir le formulaire de trigonométrie.

III.7.3 – Proposition (Rappels sans démonstration)

(i) Les fonctions sinus et cosinus sont continues, 2π-périodiques et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\cos' = -\sin \qquad \text{et} \qquad \sin' = \cos$$

(ii) La fonction cos est paire et sin est impaire.

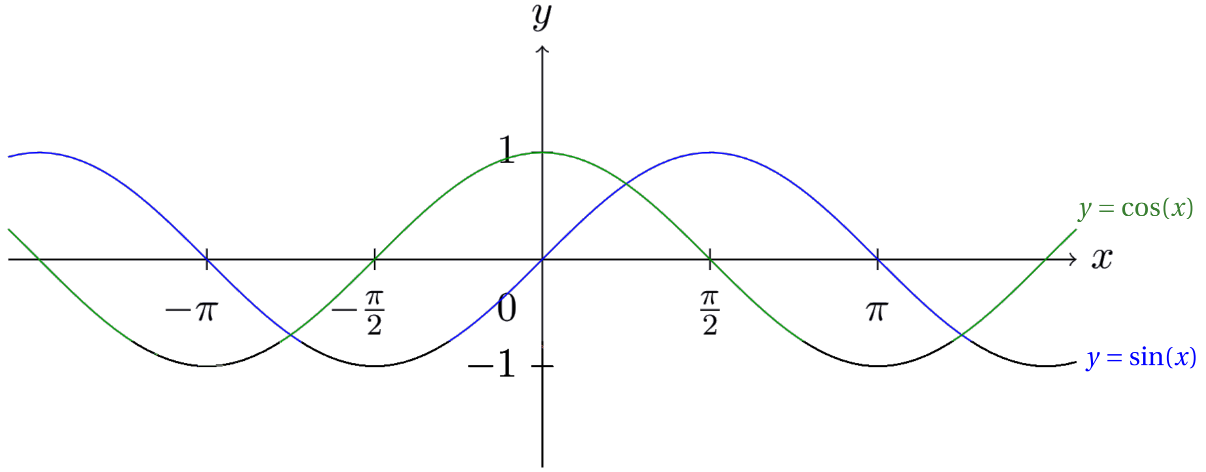
III.7.4 – Tableau de variations et graphes

La périodicité et la parité/imparité fait qu'il suffit de connaître ces fonctions sur $[0, \pi]$ pour les connaître sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Par lecture sur le cercle trigonométrique on peut alors dresser un tableau de signes et de variations :

B22

Et pour finir voici les représentations graphiques :



III.7.5 – Proposition (Quelques limites à connaître)

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ **2.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$ **3.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$

Démonstration (très contestable...)

B23

III.8 - Fonction tangente

III.8.1 – Définition

Pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$ on pose :

$$\tan(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

III.8.2 – Ensemble de définition

L'expression $\tan(x)$ est bien définie si et seulement si $\cos(x) \neq 0$ c'est à dire si et seulement si x n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble de définition de la fonction tangente est donc le suivant :

$$\boxed{\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[}$$

Pour mieux comprendre la réunion infinie présente ci-dessus on peut aussi écrire :

$$\mathscr{D}_{\tan} = \cdots \cup \left] -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\cup \cdots$$

III.8.3 – Proposition (Imparité et périodicité)

(i) La fonction tangente est impaire.

(ii) La fonction tangente est π-périodique.

Démonstration

B24

III.8.4 – Proposition (Dérivée de la fonction tangente)

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in \mathscr{D}_{\tan}$ on a :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Démonstration

B25

III.8.5 – Tableau de variation

La π-périodicité fait qu'il suffit d'étudier la fonction tangente sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ pour la connaître partout.

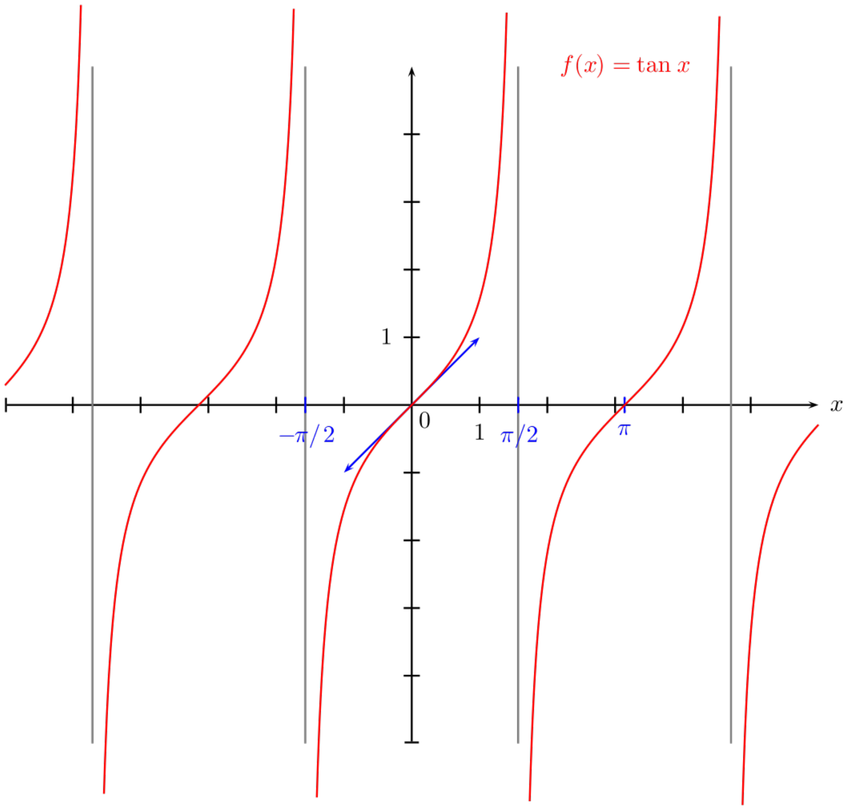
Voici un tableau de variation :

B26

On complète facilement ce tableau par les valeurs particulières et les limites aux bornes :

B27

III.8.6 – Représentation graphique



IV - Exercices additionnels

Nous ajoutons ici quelques exercices de calculs de limites. Des méthodes bien plus efficaces (utilisant notamment les *développements limités*) viendront bien plus tard dans l'année. Mais il est déjà possible de traiter un grand nombre d'exemples.

Méthode C.3

Pour faire une étude de limite on peut :

— utiliser les ***limites usuelles*** déjà rencontrées : croissances comparées (4 limites), d'autres limites à connaître pour ln et exp (3 limite), quelques limites à connaître concernant les fonctions trigonométrique (3 limites) ;

— procéder à des ***transformations d'expressions*** (du style ajouter/retrancher ou multiplier/diviser) dans l'objectif de se ramener à des limites connues ;

— procéder à un ***changement de variable*** dans l'objectif de se ramener à des limites connues ;

— faire apparaître (en transformant éventuellement l'expression) le ***taux d'accroissement*** d'une fonction dont on connait la dérivée ;

— dans le cas (certes très particulier) où apparait des racines carrés, on peut penser à multiplier et diviser par l'*expression conjuguée*.

Exercice C.10

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{2x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+\frac{1}{x}-2}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-x$

Fin du chapitre