Chapitre

G

Cours et exercices

Nombres complexes et trigonométrie

Dans le but de « proposer » des solutions à des équations qui n'en avaient pas *a priori*, les mathématiciens ont progressivement introduit les fractions, les nombres négatifs ou encore certains nombres irrationnels. L'étape franchie dans l'Italie de la Renaissance (notamment par Bombelli) consiste à introduire des nombres *imaginaires* (le terme est dû à *Descartes* et date de 1637) pour résoudre des équations polynômiales. La notation i pour désigner une solution de l'équation $x^2+1=0$ est, quant à elle, due à *Euler* et date de 1777. Il convient néanmoins d'avoir à l'esprit que la généralisation de l'usage des nombres complexes ne fut que très lente et dû attendre des fondements rigoureux avec notamment les travaux de *Gauss* et *Hamilton* vers 1830.

Sommaire

I - Propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$

I.1 - Forme algébrique

I.1.1 – Théorème (admis)

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé ***ensemble des nombre complexes*** possédant les propriétés suivantes :

(i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;

(ii) l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes, les règles de calculs restant les mêmes ;

(iii) il existe un nombre complexe noté i tel que $\mathrm{i}^2=-1$;

(iv) tout nombre complexe z s'écrit de manière ***unique*** $z=a+\mathrm{i}b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$;

(v) si $z=a+\mathrm{i}b$, le réel a est appelé ***partie réelle*** de z (noté $\mathrm{Re}(z)$) et le réel b est appelé ***partie imaginaire*** de

z (notée $\mathrm{Im}(z)$).

Exemple – Si $z = -\sqrt{2} + 5\mathrm{i}$ alors $\mathrm{Re}(z) = -\sqrt{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = 5$.

Remarques

1 ▶ L'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ est appelée ***forme algébrique*** du nombre complexe z.

2 ▶ La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.

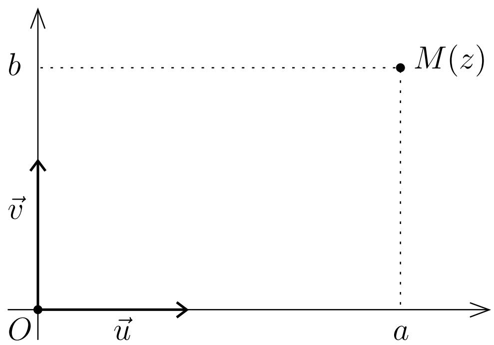
3 ▶ Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que z est ***imaginaire pur***. On note $\mathrm{i}\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

4 ▶ L'unicité de la forme algébrique a pour conséquence que pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$:

$$z = w \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \\ \text{ET} \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) \end{cases}$$

I.1.2 – Représentation géométrique

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$. À chaque complexe $z = a + \mathrm{i}b$ on associe l'unique point du plan de coordonnées (a, b), que l'on note souvent $\mathrm{M}(z)$. On dit alors que z est l'***affixe*** de ce point.



Remarques

1 ▶ Cette correspondance géométrique est fondamentale. Elle permet notamment de « voir » l'ensemble des nombres complexes comme un plan, que l'on appelle d'ailleurs ***plan complexe***.

2 ▶ Cette correspondance $\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ z & \longmapsto & \mathrm{M}(z) \end{array}$ est une ***bijection***.

I.1.3 – Proposition (Règles de calcul)

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes. Alors :

(i) $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$ autrement dit $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$;

(ii) $zz' = \left(aa' - bb'\right) + \mathrm{i}\left(ab' + a'b\right)$;

(iii) Si $z \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}$.

Résultat admis (mais démonstration très simple).

Exemples

1 ▶ Écrivons sous forme algébrique le nombre complexe $z = \dfrac{1}{2 + 3\mathrm{i}}$.

B1

2 ▶ Écrivons sous forme algébrique le nombre complexe $z = \dfrac{1-5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

B2

I.2 - Conjugaison

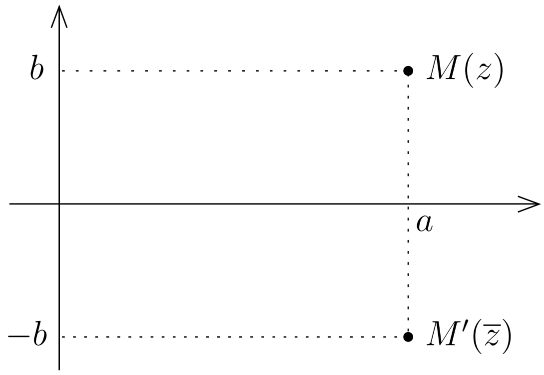
I.2.1 – Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ s'écrivant $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle *conjugué* de z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} \overset{\text{déf}}{=} a - \mathrm{i}b$$

Remarques

1 ▶ D'un point de vue géométrique, dans le plan complexe, $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe horizontal (ou *axe réel*).



2 ▶ La conjugaison $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ est une bijection et elle est sa propre réciproque.

I.2.2 – Proposition (Propriétés de la conjugaison)

Considérons deux nombres complexes z et z'.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$;

(ii) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;

(iii) $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$;

(iv) $z\overline{z} = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$ est un nombre réel positif ou nul ;

(v) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(vi) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;

(vii) Si $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$;

(viii) si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;

(ix) le nombre z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$,

(x) le nombre z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Résultat admis (mais démonstration très simple).

I.3 - Module

I.3.1 – Définition (Module d'un nombre complexe)

On appelle *module* de $z \in \mathbb{C}$, le nombre réel positif ou nul noté $|z|$ et défini par :

$$|z| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{z\overline{z}}$$

Remarques

1 ▶ Si on écrit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors on a :

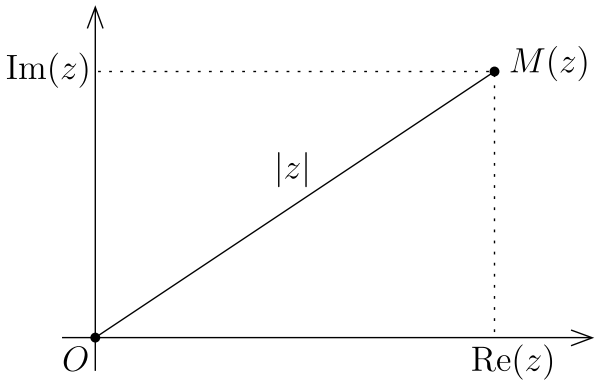
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2}$$

2 ▶ Si z est réel, c'est à dire $z = a$ alors on a :

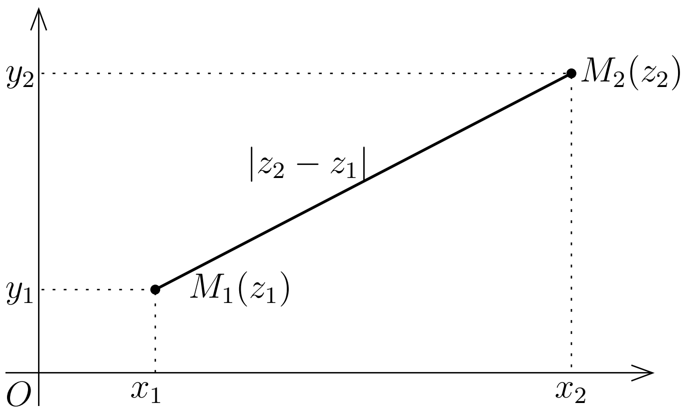
$$\underbrace{|z|}_{\text{module}} = \sqrt{a^2} = \underbrace{|a|}_{\text{valeur absolue}}$$

I.3.2 – Interprétation géométrique

Considérons le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si M est le point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ alors $|z|$ représente la distance entre les points O et M.



Plus généralement, si M_1 est d'affixe z_1 et M_2 est d'affixe z_2 alors la distance entre M_1 et M_2 est $|z_2 - z_1|$. En effet, si l'on note $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, les coordonnées des points M_1 et M_2 sont respectivement (x_1, y_1) et (x_2, y_2). La distance entre M_1 et M_2 est donc $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
Mais par ailleurs on a $|z_2 - z_1| = \sqrt{\mathrm{Re}(z_2 - z_1)^2 + \mathrm{Im}(z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Exercice G.1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z+1| = |z-1|$.

Solution

B3

I.3.3 – Proposition

On considère deux nombres complexes z et z'. ALors

(i) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$;

(ii) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;

(iii) $\left|zz'\right| = |z||z'|$;

(iv) si $z \neq 0$ alors $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{\left|z'\right|}{|z|}$;

(v) $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$;

(vi) $\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|$;

(vii) $\Big||z| - \left|z'\right|\Big| \leqslant \left|z+z'\right|$.

Démonstration de *(v)*, *(vi)* et *(vii)*

B4

B5

Remarques

1 ▶ La relation ***(vi)*** s'appelle l'***inégalité triangulaire*** et ***(vii)*** la ***seconde inégalité triangulaire***.
Notons que l'on a aussi (en remplaçant z' par $-z'$) :

$$\left||z|-\left|z'\right|\right| \leqslant \left|z-z'\right|$$

2 ▶ Considérons un triangle ABC du plan et un repère orthonormal $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On note z l'affixe de B et z' l'affixe de C. L'inégalité triangulaire affirme que $\left|z-z'\right| \leqslant |z|+\left|z'\right|$ *i.e.* la distance BC est inférieure ou égale à la somme des distances AB et AC.

B6

On a donc montré que, dans un triangle, la longueur d'un côté est majorée par la somme des longueurs des deux autres côtés. C'est bien entendu ce résultat qui est à l'origine de la terminologie d'inégalité triangulaire.

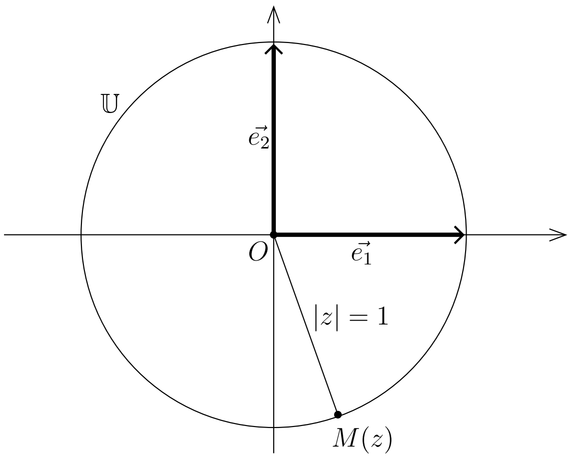
3 ▶ Plus généralement, on peut démontrer par récurrence que si $(z_1, \dots, z_n)$ est une famille de nombres complexes alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

I.3.4 – Nombres complexes de module 1

Soit z un nombre complexe et M le point du plan d'affixe z. Puisque $|z| = \text{OM}$, on a donc :

$$\begin{aligned} |z| = 1 &\iff \text{OM} = 1 \\ &\iff \text{M appartient au cercle de centre O et de rayon 1} \end{aligned}$$



Ainsi l'ensemble $\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}}$ des nombres complexes de module 1 correspond, d'un point de vue géométrique, au cercle de centre O et de rayon 1 (le ***cercle trigonométrique***).

Remarque – Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

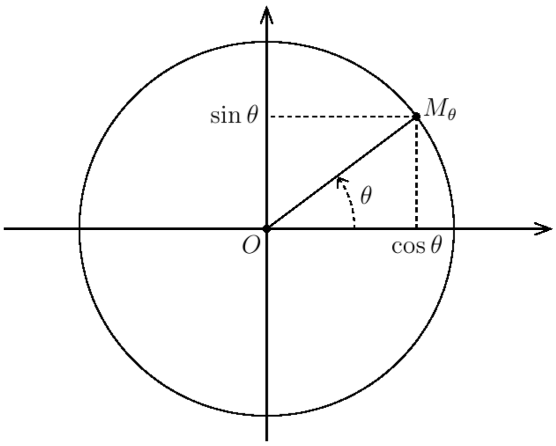
$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U} &\iff |z| = 1 \\ &\iff z\overline{z} = 1 \\ &\iff \overline{z} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

I.4 - Forme trigonométrique d'un nombre complexe

I.4.1 – Rappel : cosinus et sinus d'un nombre réel

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(\text{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ notons M_θ le point du cercle de centre O et de rayon 1 (le ***cercle trigonométrique***) tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\text{OM}_\theta})$ ait pour mesure θ (en radians, à 2π près).



Par définition $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ sont les coordonnées du point M_θ dans le repère $(\text{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

I.4.2 – Définition

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on note :

$$e^{i\theta} \overset{\text{déf}}{=} \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Remarques

1 ▶ En d'autres termes $e^{i\theta}$ est l'affixe du point M_θ introduit ci-dessus.

2 ▶ Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = e^{i\theta'} &\Longleftrightarrow \cos(\theta) = \cos(\theta') \text{ ET } \sin(\theta) = \sin(\theta') \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta' = \theta + 2k\pi \end{aligned}$$

Cette dernière propriété signifie que θ et θ' différent d'un multiple entier de 2π. On utilise pour cela la notation $\theta \equiv \theta' \ [2\pi]$ qui se lit « θ est ***congru à*** θ' ***modulo*** 2π ».

3 ▶ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\left|e^{i\theta}\right| = 1$. En effet $\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1}$. Donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Plus précisément on a la proposition suivante.

I.4.3 – Proposition

Soit z un nombre complexe. Alors $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$.

I.4.4 – Corollaire

Tout nombre complexe ***non nul*** z peut s'écrire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On dit alors que le nombre complexe z est écrit sous ***forme trigonométrique*** (ou ***exponentielle***).

Démonstration

B7

Remarques

1 ▶ Si $z = \rho e^{i\theta}$ alors nécessairement $|z| = \left|\rho e^{i\theta}\right| = \rho\left|e^{i\theta}\right| = \rho$. Ainsi, si z est écrit sous forme trigonométrique, le réel ρ est unique (et vaut $|z|$).

2 ▶ En revanche θ n'est pas unique car par exemple $e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)}$.

3 ▶ Le réel θ est en fait *unique à* 2π *près*. En effet si $z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{i\theta'}$ alors $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ et donc $\theta \equiv \theta' \ [2\pi]$ (voir l'une des remarques précédentes).

4 ▶ En pratique, pour mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique on commence par factoriser son module.

Exemple – Écrivons sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = 1 + i$.

B8

I.4.5 – Définition (Argument d'un nombre complexe)

Si $z = \rho e^{i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) on dit que θ est **un** *argument* de z.

Remarques

1 ▶ D'après ce qui précède si θ_0 est un argument de z alors les autres arguments de z sont tous les réels de la forme $\theta_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2 ▶ Tout nombre complexe non nul z possède un argument **unique** dans $]-\pi,\pi]$. On dit qu'il s'agit de l'argument principal de z et on le note souvent $\operatorname{Arg}(z)$.

3 ▶ On écrit souvent $\theta = \arg(z)$ pour dire que θ est **un** argument de z. Cette notation est très mauvaise puisque $\arg(z)$ n'est pas défini de manière unique (voir les remarques précédentes). Nous éviterons cette notation, mais il faut savoir qu'elle existe.

4 ▶ Voici la notion que nous utiliserons. Pour dire que θ est un argument de z (pas nécessairement l'argument principal), il suffit d'écrire $\theta \equiv \operatorname{Arg}(z)\ [2\pi]$.

5 ▶ Si $z \in \mathbb{C}^*$ est l'affixe d'un point M, un argument de z est en fait une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

B9

Exemples

1 ▶ Si l'on reprend l'exemple de $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, on a $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$.

2 ▶ Calculons ***un*** argument de $z' = (1+i)^5$ ainsi que ***son*** argument principal.

B10

I.4.6 – Proposition

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls. Alors

$$z = z' \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \text{ET} \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \end{cases}$$

I.4.7 – Proposition

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

(i) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;

(ii) **Formules d'*Euler* :** $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$;

(iii) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;

(iv) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;

(v) $\forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

(vi) **Formule de *Moivre* :** $\forall n \in \mathbb{Z}, \ \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Remarques

1 ▶ La propriété ***(iii)*** justifie la notation $e^{i\theta}$ puisque celle-ci se comporte comme les puissances (entières ou fractionnaires) de nombres réels.

2 ▶ Les propriétés précédentes montre que l'écriture sous forme trigonométrique est la plus adaptée pour multiplier des nombres complexes. En effet si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ alors $zz' = (\rho\rho')e^{i(\theta+\theta')}$.

I.4.8 – Proposition

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors on a :

(i) $\operatorname{Arg}\left(\overline{z}\right) \equiv -\operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$;

(ii) $\operatorname{Arg}\left(-z\right) \equiv \pi + \operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$;

(iii) $\operatorname{Arg}\left(zz'\right) \equiv \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') \ [2\pi]$;

(iv) $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') \ [2\pi]$;

(v) $\forall n \in \mathbb{Z}, \operatorname{Arg}(z^n) \equiv n\operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$.

Remarque – La proposition précédente fait usage de la notation $\operatorname{Arg}(z)$ qui désigne l'argument principal d'un nombre complexe. Mais comme les énoncés sont tous des congruences modulo 2π les propriétés écrites sont valables pour n'importe quel choix d'arguments (principal ou pas) : on peut remplacer tous les Arg par des arg.

I.5 - Exponentielle d'un nombre complexe

I.5.1 – Théorème et Définition (Exponentielle d'un nombre complexe)

(i) Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ on pose :

$$\exp(z) = e^z \overset{\text{déf}}{=} e^x.e^{iy} \overset{\text{déf}}{=} e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)$$

(ii) Le module de e^z est e^x, autrement dit $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

(iii) Pour tous nombres complexes z et z on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Remarques

1 ▶ Il résulte de ***(ii)*** que e^z n'est jamais nul. Ainsi l'application $z \mapsto \mathrm{e}^z$ arrive dans $\mathbb{C}^*$. Autrement dit 0 n'est pas atteint par la fonction exponentielle complexe.

2 ▶ **Question -** Un nombre complexe non nul est il nécessairement atteint par la fonction exponentielle ? Autrement dit si $w \in \mathbb{C}^*$, existe-t-il $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^z = w$?

B11

3 ▶ La non unicité évoquée précédemment fait que la fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ n'est ***pas bijective*** (précisément elle n'est ***pas injective***. Cela empêche de définir correctement une fonction « logarithme complexe » (rappelons que dans le cas réel ln est précisément défini comme la réciproque de exp).

I.5.2 – Proposition (Dérivation de $\exp \circ \varphi$)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors $\exp \circ \varphi$ est dérivable et on a :

$$\forall t \in \mathrm{I} \quad \left(\exp \circ \varphi\right)'(t) = \varphi'(t).\exp\left(\varphi(t)\right)$$

Résultat admis (mais démonstration facile).

Exercice G.2

Calculer $z = (1+\mathrm{i})^{25}$ et $\omega = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}$, sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

Exercice G.3

Selon les valeurs de $\theta \in [0, 2\pi]$ déterminer le module et un argument (modulo 2π) des nombres complexes $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Exercice G.4 (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire)

Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Dans quels cas a-t-on $|z+w| = |z| + |w|$?

Indication – *En reprenant la démonstration faite en classe, on pourra utiliser le fait que* $\mathrm{Re}(u) = |u|$ *si et seulement si* $u \in \mathbb{R}_+$.

II - Application à la trigonométrie

II.1 - Formules de trigonométrie usuelle

II.1.1 – Formulaire

Voir document distribué en classe : **à réviser !**

II.1.2 – Proposition (Formules d'addition)

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Résultat admis.

II.1.3 – Démonstration des autres formules à partir des formules d'addition

Démonstration

B12

B12

Exercice G.5

Résoudre les équations ou inéquations suivantes sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:

1. $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
2. $\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 < 0$
3. $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$

II.2 - Manipulations d'expressions trigonométriques

II.2.1 – Proposition (Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$, à connaître)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} &= 2\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \\ 1 - e^{i\theta} &= -2i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Démonstration

B13

Méthode G.1 (Linéarisation de $\cos^n(\theta)\sin^p(\theta)$)

Linéariser $\cos^n(\theta)\sin^p(\theta)$ signifie exprimer cette quantité comme une somme de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ ($k \in \mathbb{N}$). Le résultat ne doit comporter que des termes à la puissance 1 (pas de carré, pas de cube, ...).
Cela peut servir par exemple pour faire un calcul de primitive ou d'intégrale.
Idée générale – Utiliser les formules d'Euler ainsi que la formule du binôme de Newton.

Exemple – Linéarisons $\cos^3(x)\sin(x)$.

B14

B14

✎ Exercice G.6

Linéariser $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Méthode G.2 (Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$)

Pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, l'idée générale est d'utiliser la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton.

Exemple – Exprimons par exemple $\sin(5\theta)$ en fonction des puissances de $\sin(\theta)$.

B15

✎ Exercice G.7

1. Déterminer une fonction polynomiale P telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(5x) = \mathrm{P}\big(\cos(x)\big)$
2. Déterminer toutes les racines de P.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Méthode G.3 (Calcul de sommes trigonométriques)

Pour calculer une somme d'expressions trigonométriques on peut préalablement « passer dans $\mathbb{C}$ » en écrivant celle-ci comme la partie réelle ou la partie imaginaire d'une somme complexe (plus facile à calculer).

Exemple – Calculons la somme $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

B16

Exercice G.8

Calculer les sommes suivantes en fonction de l'entier naturel n et du réel θ :

1. $S = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

2. $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cos(k\theta)$

II.2.2 – Proposition (Somme d'un sinus et d'un cosinus de même pulsation)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

Démonstration

B17

Exercice G.9

Écrire l'expression $f(t) = 2\sqrt{3}\cos(5t) + 2\sin(5t)$ sous la forme $A\cos(5t - \varphi)$ où A et φ sont deux réels que l'on déterminera.

III - Résolutions d'équations

III.1 - Racines carrées d'un nombre complexe

III.1.1 – Exemple : racines carrées de $1+\mathrm{i}$

On cherche tous le nombres complexes z vérifiant $z^2 = 1+\mathrm{i}$.

Première méthode : en utilisant l'écriture trigonométrique.

B18

Seconde méthode : en utilisant l'écriture algébrique.

B19

Remarque – Les deux méthodes précédente donnent évidemment les mêmes résultats (à l'ordre prêt). On en déduit que :

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Cela donne facilement (après quelques simplifications) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

III.1.2 – Proposition

Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées.

Démonstration

On raisonne comme dans l'exemple précédent en utilisant la forme trigonométrique. Soit $z_0=\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ un complexe fixé. Alors le complexe $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une racine carrée de z_0 si et seulement si $\rho^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}=\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ *i.e.* si seulement si $\rho^2=\rho_0$ et $2\theta\equiv\theta_0\ [2\pi]$. Cette dernière condition étant équivalente à $\theta=\frac{\theta_0}{2}\ [\pi]$, on en déduit que les seules solutions sont : $z_1=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_0}{2}}$ et $z_2=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta_0}{2}+\pi\right)}=-z_1$. Ces deux racines sont différentes (car opposées) sauf si $z_1=0$.

Remarque – Dans $\mathbb{R}$ on choisit de noter $\sqrt{x}$ la racine carrée *positive* de x. Dans $\mathbb{C}$ il n'y a aucune raison de privilégier l'une des deux racines évoquées ci-dessus. On n'utilise donc ***jamais*** la notation $\sqrt{\ }$ dans $\mathbb{C}$.

III.2 - Racines n-ième d'un nombre complexe

III.2.1 – Définition (Racines n-ièmes de l'unité)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle ***racine n-ièmes de l'unité*** tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $z^n=1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces racines n-ièmes de l'unité.

Remarque – Si $z\in\mathbb{U}_n$ on a $z^n=1$ donc $|z^n|=|z|^n=1$ et donc $|z|=1$. Ainsi, une racine n-ième de l'unité est nécessairement de module 1. Ainsi $\mathbb{U}_n\subset\mathbb{U}$ ce qui explique la notation choisie.

Exemples

1 ▶ Pour $n=2$, les ***racines carrées de l'unité*** sont 1 et -1 : $\mathbb{U}_2=\{-1,1\}$.

2 ▶ Pour $n=3$, cherchons les ***racines cubiques*** (ou 3e) ***de l'unité*** sous forme trigonométrique :

B20

On a donc $\mathbb{U}_3=\{1,\mathrm{j},\mathrm{j}^2\}$ avec $\mathrm{j}\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Ces trois nombres sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique :

B21

III.2.2 – Théorème (Description des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres complexes :

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1} \quad \text{avec} \quad \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

c'est à dire les nombres de la forme :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

Démonstration

B22

B22

Remarques

1 ▶ Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique (voir les exemples précédents).

B23

2 ▶ Si z est une racine n-ième de l'unité alors c'est aussi le cas de $\overline{z}$. - En effet : $\left(\overline{z}\right)^n = \overline{z^n} = \overline{1} = 1$.

3 ▶ Le produit de deux racines n-ième de l'unité z_1 et z_2 est encore une racine n-ième de l'unité.
En effet : $\left(z_1 z_2\right)^n = \left(z_1\right)^n \left(z_2\right)^n = 1 \times 1 = 1$.

III.2.3 – Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, alors on a : $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.
Autrement dit la somme de toutes les racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Démonstration

B24

III.2.4 – Racines n-ièmes d'un nombre complexe a (quelconque)

Considérons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, de sorte que les racines n-ièmes de l'unité soient $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$.

On s'intéresse à l'équation $z^n = a$ où $a \in \mathbb{C}$. Le cas où $a = 0$ étant évident, on suppose désormais que $a \neq 0$. On note $a = |a|\,e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$, il est facile de vérifier que le nombre complexe $r_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\alpha}{n}}$ vérifie $\left(r_0\right)^n = a$:

B25

On peut alors écrire :

B26

Autrement dit, une fois trouvée une racine n-ième de a, les autres racines s'obtiennent en la multipliant par les racine n-ièmes de l'unité.

III.2.5 – Proposition

Les solutions de $z^n = a$ sont les nombres complexes de la forme $r_0\omega^k$ avec $r_0 = \sqrt[n]{|a|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}(a)}{n}}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Les racines n-ièmes du nombre a sont donc les n nombres complexes :

$$r_k = \sqrt[n]{|a|}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}(a)+2k\pi}{n}\right) \quad \text{où} \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

III.3 - Équations polynomiales de degré 2

III.3.1 – Cas de coefficients réels

On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. Rappelons la ***forme canonique*** obtenue dans le premier chapitre du trinôme du second degré $p(z) = az^2 + bz + c$:

$$p(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Les cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$ ont déjà été traités.

Si $\Delta < 0$ on a alors $\Delta = -|\Delta| = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$ et donc :

B27

ce qui prouve que les solutions de (E) sont les nombres $\dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Notons que dans ce cas, les deux solutions sont conjuguées.

On vient donc de démontrer le théorème suivant.

III.3.2 – Théorème

Soit a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ et notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$.

(i) Si $\Delta = 0$ l'équation (E) admet $\dfrac{-b}{2a}$ comme unique solution.

(ii) Si $\Delta > 0$ les solutions de (E) sont les nombres $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

(iii) Si $\Delta < 0$ les solutions de (E) sont les nombres $\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple – Considérons l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

B28

On a donc (à retenir) $\boxed{1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0}$ et $\boxed{1 + \mathrm{j}^2 + \mathrm{j}^4 = 0}$.

III.3.3 – Cas de coefficients complexes

Comment peut-on résoudre une équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$?

On commence par procéder comme dans le cas où a, b et c sont des réels *i.e.* on met cette équation sous forme canonique en factorisant l'expression $p(z) = az^2 + b^z + c$:

$$p(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

On cherche ensuite une racine carrée δ de Δ (voir **III.1**, deux méthodes possibles). On a alors :

B29

On en déduit que les racines de l'équation sont les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

Remarque – Attention, dans le cas de coefficients complexes il n'y a aucune raison pour que les deux solutions soient conjuguées.

III.3.4 – Relations entre les coefficients et les racines

Reprenons le calcul précédent en notant z_1 et z_2 les deux racines de l'équation (réelles ou complexes).

D'après ce qui précède la forme factorisée de $p(z)$ est la suivante :

B30

Mais par ailleurs $p(z) = az^2 + bz + c$ ce qui prouve par identification que :

B31

On vient donc de démontrer le résultat suivant.

III.3.5 – Proposition

Soit $p(z) = az^2 + bz + c$ un trinôme de degré 2 avec $()a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$. Si l'on note z_1 et z_2 les deux racines de l'équation $p(z) = 0$ on a alors :

(i) Somme des racines : $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$;

(ii) Produit des racines : $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemple – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = z^2 + bz + c$$

avec $b = -\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = -2\cos(\theta)$ et $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1$.

On a donc (***à retenir***) :

$$\boxed{\left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = z^2 - 2\cos(\theta) z + 1}$$

Exercice G.10

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^2 = 12 + 16\mathrm{i}$

2. $z^2 - 2(2+\mathrm{i})z + 6 + 8\mathrm{i} = 0$

Exercice G.11

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - \overline{z} + 2 = 0$$

Exercice G.12

Déterminer :

1. Les racines cinquièmes de $-\mathrm{i}$

2. Les racines sixièmes de $\dfrac{-4}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

Exercice G.13

En calculant les racines carrées de $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$ de deux manières différentes, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice G.14

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+\mathrm{i})^7 + (z-\mathrm{i})^7 = 0$.

2. Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide de fonctions trigonométriques.

Exercice G.15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) + 1 = 0$

IV - Application des nombres complexes à la géométrie plane

On suppose, dans toute cette section que le plan est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

IV.1 - Repérage dans le plan complexe

IV.1.1 – Affixe d'un point

Si M est le point du plan de coordonnées (x, y), on rappelle que l'*affixe* de M est le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$. On a alors :

$$\boxed{\begin{cases} |z| & = \mathrm{OM} \\ \mathrm{Arg}(z) & \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\ [2\pi] \quad (\text{si } z \neq 0 \text{ c'est à dire } \mathrm{M} \neq 0) \end{cases}}$$

IV.1.2 – Affixe d'un vecteur

De même, si $\overrightarrow{w}$ est le vecteur du plan de coordonnées (x, y), l'affixe de $\overrightarrow{w}$ est le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$. On a alors :

$$\boxed{\begin{cases} |z| & = \left\|\overrightarrow{w}\right\| \\ \mathrm{Arg}(z) & \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})\ [2\pi] \quad (\text{si } z \neq 0 \text{ c'est à dire } \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}) \end{cases}}$$

Si les points A et B ont pour affixes respectives a et b alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $b - a$. On a alors :

$$\boxed{\begin{cases} |b-a| & = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \mathrm{AB} \\ \mathrm{Arg}(b-a) & \equiv \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\ [2\pi] \quad (\text{si } b-a \neq 0 \text{ c'est à dire } \mathrm{A} \neq \mathrm{B}) \end{cases}}$$

IV.1.3 – Proposition (Configuration de quatre points)

Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respective a, b, c et d (avec $a \neq b$ et $c \neq d$). On a alors :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{d-c}{b-a}\right| & = \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} \\ \operatorname{Arg}\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) & \equiv \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration

B32

IV.2 - Caractérisation de certaines propriétés géométriques

Dans tout ce paragraphe A, B, C et D sont quatre points du plan d'affixes respectives a, b, c et d.

On cherche tout d'abord à caractériser le parallélisme des droites (AB) et (CD) :

B33

On a donc démontré le résultat suivant.

IV.2.1 – Proposition

$$(\mathrm{AB}) \mathbin{/\!/} (\mathrm{CD}) \iff \operatorname{Arg}\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

On cherche ensuite à caractériser l'alignement des points A, B et C. Remarquons tout d'abord que cela équivaut à dire que (AB) // (AC). Compte tenu du résultat précédent cela donne la proposition suivante.

IV.2.2 – Proposition

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

On cherche ensuite à caractériser l'orthogonalité des droites (AB) et (CD) :

B34

On a donc démontré le résultat suivant.

IV.2.3 – Proposition

$$(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{CD}) \iff \operatorname{Arg}\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

IV.2.4 – Caractérisation des cercles

Pour terminer ce paragraphe on cherche à caractériser à l'aide des nombres complexes l'appartenance d'un point à un cercle. On considère pour cela un point M d'affixe z, un point Ω d'affixe ω et $r > 0$. Si l'on note $\mathscr{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r on a :

B35

On en déduit que le cercle $\mathscr{C}(\Omega, r)$ est l'ensemble des points d'affixes $\omega + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

B36

Exercice G.16

On note A, B et C les trois points du plan d'affixes respectives $a = 1+\mathrm{i}$, $b = -\mathrm{i}$, $c = -1+2\mathrm{i}$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

IV.3 - Notion de transformation du plan

On note $\mathscr{P}$ le plan de la géométrie usuelle (euclidienne).

IV.3.1 – Définition (Transformation du plan)

On appelle ***transformation*** du plan toute application ***bijective*** $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ du plan dans lui même.

Remarques

1 ▶ Rappelons que la bijectivité de F signifie que tout point $P \in \mathscr{P}$ possède un unique antécédent par F. En écriture mathématique :

$$\forall P \in \mathscr{P}, \exists!\, M \in \mathscr{P},\ F(M) = P$$

2 ▶ Pour mieux comprendre l'idée de bijectivité, on peut la séparer en deux propriétés (*injectivité* et *surjectivité*) :

— **Injectivité -** Deux points différents ont des images différentes c'est à dire :

$$\forall (M_1, M_2) \in \mathscr{P}^2,\ M_1 \neq M_2 \Longrightarrow F(M_1) \neq F(M_2)$$

— **Surjectivité -** Tout point du plan est l'image par F d'un point du plan c'est à dire :

$$\forall P \in \mathscr{P}, \exists M \in \mathscr{P},\ P = F(M)$$

3 ▶ Rappelons qu'une application bijective possède une bijection réciproque. Si F est une transformation du plan alors F^{-1} est aussi une transformation du plan. Dire que F et F^{-1} sont réciproques l'une de l'autre signifie que F^{-1} « défait » le travail fait par F : si un point M a été transformé en P par l'application F alors F^{-1} transforme P en M (retour au point de départ).

Exemples

1 ▶ Les translations, rotations et homothéties sont des transformations du plan.
Quels sont leurs réciproques ?

B37

2 ▶ La projection orthogonale sur l'axe (Ox) n'est pas une transformation du plan. Il y a en effet des points différents qui ont la même image. Par exemple les points M_1 et M_2 d'affixes i et 2i ont pour image le point O.

IV.3.2 – Écriture complexe d'une transformation

Si $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une transformation du plan, on appelle ***représentation complexe*** (ou ***écriture complexe***) de F l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à tout complexe z affixe du point M associe l'affixe z' du point F(M).

Pour mieux comprendre cette notion, voici deux schémas explicatifs (l'un au niveau des ensembles et l'autre au niveau des éléments) :

B38

Évidemment la bijectivité de F implique celle de f (et réciproquement d'ailleurs). Donc la représentation complexe d'une transformation du plan est une application bijective de $\mathbb{C}$ dans lui même.

Exemples

1 ▶ L'écriture complexe de la translation T de vecteur $\overrightarrow{e_1}$ (vecteur horizontal du repère) est l'application suivante :

B39

2 ▶ L'écriture complexe de la rotation R de centre O (origine du repère) et d'angle θ est l'application suivante :

B40

IV.4 - Transformations usuelles (et leur écriture complexe)

IV.4.1 – Théorème et Définition (Translation)

(i) **Définition -** Si $\vec{w}$ est un vecteur donné on appelle translation de vecteur $\vec{w}$ l'application T qui à tout point M associe le point $M' = T(M)$ caractérisé par :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$$

(ii) **Théorème -** Il s'agit d'une transformation du plan et sa représentation complexe est :

$$\begin{array}{rccc} t: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z+a \end{array}$$

où a est l'affixe du vecteur $\vec{w}$.

Démonstration

B41

Illustration

B42

IV.4.2 – Théorème et Définition (Rotation)

(i) **Définition -** Si Ω est un point donné du plan et θ un réel on appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application R qui à tout point M associe le point $M' = R(M)$ caractérisé par :

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

(ii) **Théorème -** Il s'agit d'une transformation du plan et sa représentation complexe est la suivante :

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \omega + e^{i\theta}\left(z-\omega\right) \end{array}$$

où ω est l'affixe de Ω.

Démonstration

B43

Illustration

B44

IV.4.3 – Théorème et Définition (Homothétie)

(i) **Définition -** Si Ω est un point donné du plan et $k \in \mathbb{R}^*$ on appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application H qui à tout point M associe le point $\mathrm{M}' = \mathrm{H}(\mathrm{M})$ caractérisé par :

$$\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'} = k.\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}$$

(ii) **Théorème -** Il s'agit d'une transformation du plan et sa représentation complexe est la suivante :

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \omega + k(z-\omega) \end{array}$$

où ω est l'affixe de Ω.

Démonstration

B45

Illustration

B46

IV.4.4 – Théorème et Définition (Symétrie d'axe $(\mathrm{O}x)$)

(i) **Définition -** La symétrie d'axe $(\mathrm{O}x)$ est l'application S qui à tout point $\mathrm{M}(x, y)$ associe le point $\mathrm{M}' = \mathrm{S}(\mathrm{M})$ de coordonnées $(x, -y)$.

(ii) **Théorème -** Il s'agit d'une transformation du plan et sa représentation complexe est la suivante :

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$$

Exercice G.17

Soit A le point du plan d'affixe $a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

1. Mettre le nombre a sous forme trigonométrique puis placer le point A sur une figure précise (unité graphique 4cm).

2. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa représentation complexe $\big($autrement dit r est l'application qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de $\mathrm{M}' = \mathrm{R}(\mathrm{M})\big)$.
Exprimer $r(z)$ en fonction de z.

3. Sur la figure, construire le point B image de A par la rotation R. Déterminer l'affixe b du point B sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice G.18

Comparer les résultats des exercices **G.13** et **G.17**. Des commentaires ?

Exercice G.19

Soit H l'homothétie de centre $\mathrm{A}(3, -1)$ et de rapport $-\sqrt{2}$, R la rotation de centre $\mathrm{B}(0, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BO}}$. On s'intéresse à la transformation $\mathrm{F} = \mathrm{T} \circ \mathrm{R} \circ \mathrm{H}$.

1. Déterminer la représentation complexe f de F.

2. Déterminer le point Ω tel que $\mathrm{F}(\Omega) = \mathrm{O}$.

Exercice G.20 ($\star$)

Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice G.21 ($\star$)

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est telle que les points d'affixes z, z^2 et $1/z$ soient alignés.

Fin du chapitre