Chapitre H

Cours et exercices

Primitives, intégrales et équations différentielles

Le but de ce chapitre est de consolider et enrichir les compétences acquises en terminale concernant le calcul de primitives et d'intégrales puis d'apprendre à résoudre un certain nombre d'équations différentielles (utiles par exemple en sciences physiques). Le point de vue est volontairement pratique et les questions théoriques seront étudiées plus tard dans l'année.
Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Sommaire

I - Primitives et intégrales sur un segment

I.1 - Primitives

I.1.1 – Définition (Primitive)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que F est ***une*** primitive de f sur I si F est dérivable et $\mathrm{F}' = f$.

Exemples

1 ▶ La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

2 ▶ La fonction ln est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques

1 ▶ Il n'y a ***jamais*** unicité car si F est une primitive de f alors pour tout réel λ, il en est de même de la fonction $\mathrm{F}+\lambda$.

2 ▶ On utilisera le verbe ***primitiver*** (néologisme) pour désigner la recherche d'une primitive.

3 ▶ On pourra utiliser la notation $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ qui désigne en toute rigueur l'***ensemble*** des primitives de f ou par abus de notation ***l'une d'entre elles***.

I.1.2 – Proposition

Soit f un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction et F une primitive de f. Alors ***les*** primitives de f sont les fonctions $\mathrm{F}+\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque – Sous réserve d'existence, il y a donc ***unicité à constante additive près***.

I.1.3 – Proposition

Opérations et primitives] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

(i) Si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est une primitive de $f+g$.

(ii) Si F est une primitive de f et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda\mathrm{F}$ est une primitive de λf.

Remarques

1 ▶ Attention, contrairement à la dérivation, il n'y a ***pas de formule directe permettant de primitiver un produit ou une composée*** (ne pas essayer d'inventer une règle, elle sera probablement fausse !).

2 ▶ Cela explique que le ***calcul de primitives soit plus difficile que le calcul de dérivées*** (un peu comme factoriser est plus difficile que développer).

3 ▶ La recherche de primitive est tellement délicate, que parfois elle peut ne pas aboutir. Pour être un peu plus précis, il existe des fonctions s'exprimant à l'aide de fonctions usuelles, dont les primitives (qui pourtant existent) ne peuvent pas s'écrire explicitement à l'aide de fonctions usuelles (c'est le cas de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$). Ce sujet (fort intéressant) dépasse très largement notre programme (théorème de Liouville en *algèbre différentielle*).

I.1.4 – Primitives usuelles

Pour espérer pouvoir faire des calculs de primitives, il faut au minimum connaître les ***primitives usuelles (voir formulaire)***. Ensuite, il faut être capable d'identifier une forme connue, voire de s'y ramener par quelques transformations.

Exemples

1 ▶ Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f donnée par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

B1

2 ▶ Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f donnée par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

B2

3 ▶ Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f donnée par : $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sin(x)-5}$

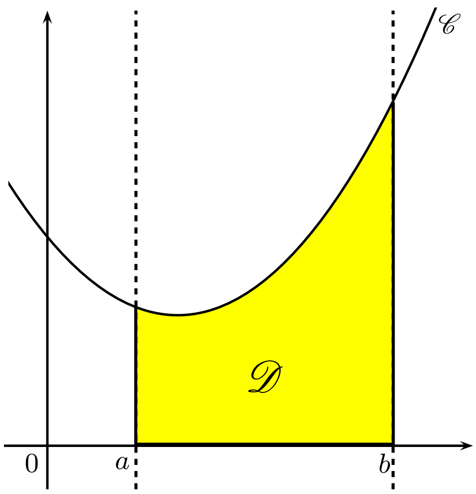
B3

I.2 - Approche intuitive de la notion d'intégrale sur un segment

Il n'est pas facile de définir rigoureusement la notion d'***intégrale*** d'une fonction sur un segment. Une idée intuitive consiste à se référer à la notion d'***aire***. Cela ne fait que déplacer le problème puisque la notion d'aire n'a jamais été définie proprement dans l'enseignement secondaire. Nous nous contenterons donc pour l'instant d'idées intuitives.

Si f est une fonction continue et *positive* définie sur un intervalle $[a,b]$ alors intuitivement l'intégrale de f sur $[a,b]$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe de f, l'axe horizontal et les deux droites verticales d'abscisses a et b. Elle est notée :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f$$

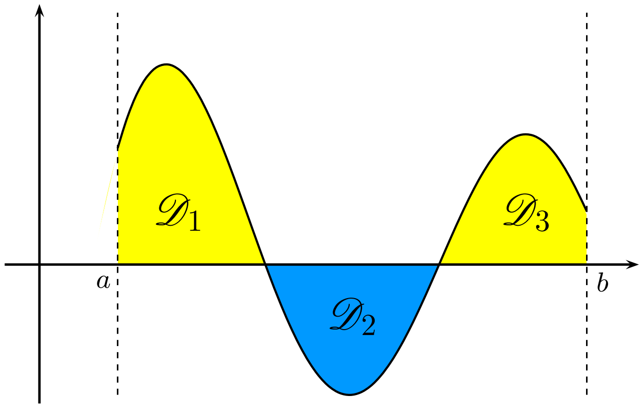


De même, si f est une fonction continue et négative sur $[a,b]$ alors son intégrale vaut

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{aire}(\mathscr{D}),$$

le domaine $\mathscr{D}$ étant défini comme précédemment.

Si f est une fonction de signe quelconque sur $[a,b]$ alors son intégrale est la somme algébrique des aires des domaines sur lesquels f garde un signe constant.



Sur la figure précédente on a par exemple :

$$\int_a^b f = \text{aire}(\mathscr{D}_1) - \text{aire}(\mathscr{D}_2) + \text{aire}(\mathscr{D}_3)$$

Rappelons que tout cela est seulement intuitif puisque nous n'avons pas défini rigoureusement la notion d'aire. Mais rassurez-vous, une construction rigoureuse de l'intégrale sera abordée plus tard dans l'année.

I.3 - Lien entre primitives et intégrales

I.3.1 – Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $a \in \mathrm{I}$.

Alors la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{F}: & \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule au point a.

Remarques

1 ▶ Sous les hypothèses précédentes on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$$

2 ▶ On peut en déduire le calcul de la dérivée d'une fonction de la forme :

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est continue sur I et α et β deux fonctions dérivables à valeurs dans I.
Pour cela on utilise le même notation F que dans l'énoncé précédent, en introduisant un point quelconque $a \in \mathrm{I}$:

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(\beta(x)) - \mathrm{F}(\alpha(x))$$

On en déduit (par dérivation composée) :

$$g'(x) = \beta'(x).\mathrm{F}'(\beta(x)) - \alpha'(x).\mathrm{F}'(\alpha(x)) = \beta'(x).f(\beta(x)) - \alpha'(x).f(\alpha(x))$$

I.3.2 – Corollaire (Existence de primitive pour une fonction continue)

Toute fonction continue sur un intervalle possède une (des) primitives.

Remarque – Il existe des fonctions sans primitive. Pour trouver un exemple, le théorème précédent nous dit qu'il faut chercher parmi les fonctions non continues. Mais cela est une autre histoire...

I.3.3 – Corollaire (Calcul d'intégrale à l'aide d'une primitive)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ et F une primitive de f. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Démonstration

Soit G la primitive de f qui s'annule en a c'est-à-dire :

$$\mathrm{G} : x \longmapsto \mathrm{G}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme F et G sont deux primitives de f, elles diffèrent d'une constante : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{F} = \mathrm{G} + \lambda$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) &= \Big(\mathrm{G}(b) + \lambda\Big) - \Big(\mathrm{G}(a) + \lambda\Big) \\
&= \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a) \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Remarques

1 ▶ D'après le théorème précédant, il suffit de connaitre une primitive d'une fonction pour calculer son intégrale sur un segment. Il faut donc connaitre parfaitement les primitives usuelles (voir formulaire).

2 ▶ Si l'on choisit une autre primitive H de f alors le résultat est le même. En effet F et H étant des primitives d'une même fonction, elle diffèrent d'une constante : $\mathrm{H} = \mathrm{F} + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\Big[\mathrm{H}(x)\Big]_a^b = \mathrm{H}(b) - \mathrm{H}(a) = (\mathrm{F}(b) + \lambda) - (\mathrm{F}(a) + \lambda) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b.$$

II - Méthodes de calcul

II.1 - Intégration directe

II.1.1 – Si on connait une primitive

La première chose à faire lors d'un calcul de primitive ou d'intégrale est de bien ouvrir les yeux pour voir si on n'est pas (par hasard) en présence d'une forme connue (en particulier dérivée composée). Éventuellement on essaye de s'y ramener par de petites opérations (mise en facteur, décomposition en éléments simples, *etc.*)

Exemples

1 ▶ Calculons l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x - 6}\,\mathrm{d}x$$

B4

B4

2 ▶ Calculons l'intégrale suivante :

$$J = \int_1^3 \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x$$

B5

Exercice H.1

Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice H.2

Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - x - 2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f et prouver qu'il existe des réels a, b, c, α et β tels que :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) = a + \frac{b}{x-\alpha} + \frac{c}{x-\beta}$$

2. Calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

II.1.2 – Les complexes pour simplifier !

Si f est à valeurs complexes on précise (ou on rappelle) que f est dite continue (resp. dérivable) si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Et dans le cas dérivable on a :

$$f' = \Big(\mathrm{Re}(f)\Big)' + \mathrm{i}\Big(\mathrm{Im}(f)\Big)'$$

On peut démontrer (c'est facile mais long à écrire) que les règles de dérivation sont les mêmes pour les fonctions à valeurs complexes.

Remarques

1 ▶ Un exemple utile est celui d'une fonction de la forme $\exp(\varphi) = \exp\circ\varphi$ où φ est dérivable :

$$\Big(\exp\circ\varphi\Big)' = \varphi'.\exp\circ\varphi$$

En inversant le sens de lecture, on en déduit qu'une fonction de la forme $\varphi'.\exp(\varphi)$ se primitive en $\exp\circ\varphi$.

2 ▶ En particulier, si $\alpha \in \mathbb{C}$, la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est la fonction $x \mapsto \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Et pour $\alpha \neq 0$, en inversant le sens de lecture on en déduit que $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ a pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$.

Exemple – Cherchons une primitive de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ $\big($à adapter pour $\mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\big)$.

B6

II.2 - Intégration par parties

II.2.1 – Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$)

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I si :

- f est dérivable sur I ;
- f' est continue sur I.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I est noté $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

Remarques

1 ▶ Attention de ne pas tout mélanger ! Si f est une fonction dérivable alors elle est nécessairement continue. En revanche, sa dérivée f' n'est pas automatiquement continue.

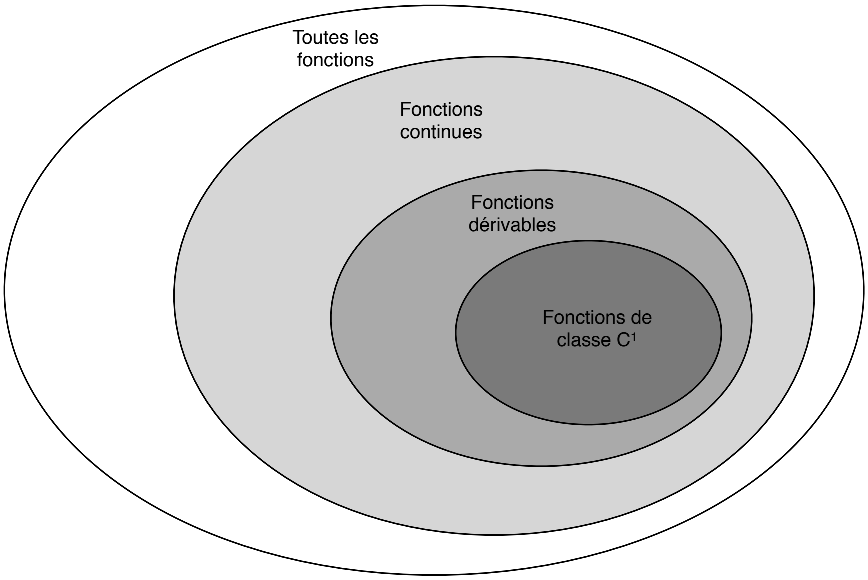
2 ▶ Des exemples de fonctions dérivables mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ seront étudiés dans la chapitre consacré spécifiquement à la dérivation.

3 ▶ En pratique, pour justifier qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ on se contente de dire que c'est une composée de fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^1$.

4 ▶ Ainsi, on a une suite d'inclusions strictes :

$$\underbrace{\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})}_{\text{fonctions } \mathscr{C}^1} \subset \underbrace{\mathscr{D}(\mathrm{I}, \mathbb{K})}_{\text{fonctions dérivables}} \subset \underbrace{\mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})}_{\text{fonctions continues}} \subset \underbrace{\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})}_{\text{fonctions}}$$

Inclusions que l'on peut schématiquement représenter ainsi :



L'ensemble le **plus petit** correspond aux fonctions les **plus rares** car elles possèdent des propriétés **plus fortes**.

II.2.2 – Un premier pas

Considérons deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I.

On sait que $(uv)' = u'v + uv'$ et donc que $uv' = (uv)' - u'v$. Pour tout $(a, b) \in \mathrm{I}^2$, intégrons cette égalité entre a et b :

$$\begin{aligned} \int_a^b uv' &= \int_a^b \left((uv)' - u'v\right) \\ &= \int_a^b (uv)' - \int_a^b u'v \end{aligned}$$

La première intégrale se calcule par intégration directe car $(uv)'$, qui est une fonction continue, a bien sûr pour primitive uv. On a donc :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

On a donc le théorème suivant.

II.2.3 – Théorème (intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle et $(a, b) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

$$\int_a^b uv' = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Exemples

1 ▶ On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

B7

2 ▶ Le principe d'intégration par parties peut aussi servir à ***calculer une primitive***.
Cherchons par exemple une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

B8

Exercice H.3

À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice H.4

À l'aide d'une intégration par partie calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t$$

II.3 - Changement de variable

II.3.1 – Théorème (changement de variable)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathrm{J},\mathrm{I})$. Pour tout $(a,b) \in \mathrm{J}^2$ on a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration

Comme f est continue sur I, elle possède une primitive F. On a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} = \mathrm{F}\big(\varphi(b)\big) - \mathrm{F}\big(\varphi(a)\big)$$

Sous la seconde intégrale, la fonction est exactement la dérivée de $\mathrm{F}\circ\varphi$. En effet

$$\big(\mathrm{F}\circ\varphi\big)' = \varphi'.\mathrm{F}'\circ\varphi = \varphi'.f\circ\varphi$$

On a donc :

$$\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b \big(\mathrm{F}\circ\varphi\big)'(u)\,\mathrm{d}u = \Big[\mathrm{F}\circ\varphi(u)\Big]_{u=a}^{u=b} = \mathrm{F}\big(\varphi(b)\big) - \mathrm{F}\big(\varphi(a)\big)$$

Remarques

1 ▶ En pratique on procède à un tel changement de variable en écrivant le lien entre l'ancienne et la nouvelle variable et en dérivant :

$$t = \varphi(u) \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \varphi'(u)$$

ce que l'on peut écrire (même si cela n'a pas vraiment de sens mathématique) : $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

2 ▶ Il y a trois choses à modifier lors d'un changement de variables : la fonction elle même, l'*élément différentiel* ($\mathrm{d}t$ qui devient $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$) et bien sûr les bornes (en faisant attention à l'ordre).

Exemples

1 ▶ On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$$

B9

2 ▶ On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

B10

Exercice H.5

Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{1-x^2}}\,dx$$

en faisant le changement de variable $y = \operatorname{Arcsin}(x)$.

Exercice H.6

À l'aide d'un changement de variable calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) + 4\sin(t) + 5}\,dt$$

II.4 - Exercices additionnels

Exercice H.7

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3(x)}{2+\cos(x)}\,dx$$

Indication – *On pourra faire un changement de variable pour se ramener à une fraction rationnelle (quotient de polynômes) puis effectuer une division euclidienne.*

Exercice H.8

Étants donnés deux nombres réels $a < b$, calculer l'intégrale :

$$I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$$

Indication – *Mettre le polynôme figurant dans la racine sous forme canonique, puis effectuer quelques changements de variables judicieux.*

III - Équations différentielles linéaires

III.1 - Équations différentielles linéaires d'ordre 1

III.1.1 – Problématique

Une ***équation différentielle d'ordre*** 1 est une relation liant une fonction (inconnue) et sa dérivée. Précisément, il sera question dans ce paragraphe d'une équation différentielle de la forme :

$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Résoudre l'équation (E) signifie trouver toutes les fonctions y de classe $\mathscr{C}^1$ sur I vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Remarque – Une fois n'est pas coutume on fait l'économie du quantificateur universel $\forall$ dans l'écriture de l'équation (E). Mais il faut bien avoir en tête que celui-ci est sous-entendu.

À l'équation (E) est associée l'équation ***homogène*** (c'est à dire sans second membre) :

$$(E_0) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

III.1.2 – Théorème (solutions de l'équation homogène)

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : \begin{array}{ccl} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.

Démonstration

B11

Exemple – Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante : $y'(t) + t\,y(t) = 0$.

B12

Remarques

1 ▶ Pour alléger les notations, il est de tradition de ne pas faire figurer la variable de la fonction inconnue. L'équation précédente peut donc être notée : $y' + ty = 0$.
Attention, dans ce cas, de bien identifier qui est la variable et qui est la fonction inconnue !

2 ▶ La résolution d'un telle équation consiste donc à trouver une primitive de la fonction a. C'est la raison pour laquelle on dit souvent « intégrer » une équation différentielle au lieu de « résoudre » une équation différentielle.

III.1.3 – Théorème

Si y_P est une solution déjà connue de l'équation (E) (on parle d'une ***solution particulière***) alors les solutions de l'équation complète (E) sont les fonctions de la forme $y_G = y_P + y_H$ où y_H est une solution (quelconque) de l'équation homogène (E_0) .

Démonstration

B13

Remarques

1 ▶ Ce résultat s'interprète de la manière suivante : la solution ***générale*** de l'équation (E) s'obtient en ajoutant ***une*** solution ***particulière*** de (E) et la solution ***générale*** de (E_0) : $y_G = y_P + y_H$.

2 ▶ Pour expliciter les solutions de E, il est donc nécessaire de trouver ***au moins*** une solution particulière. Une telle solution particulière peut-être :

- soit évidente (une fonction constante par exemple) ;
- soit trouvée par une méthode spécifique donnée dans un énoncé (par exemple si l'on demande de chercher les solutions polynomiales d'un degré particulier).
- soit obtenue par la ***méthode de variation de la constante*** décrite ci-dessous.

Méthode H.1 (Méthode de variation de la constante)

Cette méthode consiste à chercher une solution particulière y_P sous la forme :

$$y_P : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda(t)e^{-A(t)} \end{array}$$

Remarques

1 ▶ Par rapport à la solution générale de l'équation homogène, la ***constante*** λ est devenu une ***fonction*** (ce qui explique le vocabulaire volontairement contradictoire).

2 ► En théorie, cette méthode conduit de manière certaine à une solution. En pratique, cela nécessite un calcul de primitive qui peut ne pas être possible de manière explicite. Justifions au moins l'existence théorique :

B14

Ainsi, les choses se mettent en place petit à petit. Nous venons de voir que la recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle se ramène à un calcul de primitive (et cela est lié au calcul intégral par le théorème fondamental de l'analyse). On comprend mieux maintenant pourquoi toutes ces notions sont dans le même chapitre.

3 ► Il n'est pas indispensable de retenir par coeur le résultat du calcul précédent. Le plus simple est sans doute de le reproduire à chaque fois que l'on utilise cette méthode.

Exemple – Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante : $y' + ty = te^{t^2}$.

B15

Remarques

1 ▶ Une erreur très fréquente consiste à s'arrêter une fois trouvée l'expression de $\lambda(t)$. Or c'est la solution particulière $y_P(t) = \lambda(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ que l'on cherche.

2 ▶ Il faut bien comprendre que lors de la recherche d'une solution *particulière* on peut *choisir* la constante. Et bien sûr le choix le plus simple et souvent le meilleur.

III.1.4 – Proposition (principe de superposition)

Avec les notations et hypothèses précédentes, si l'on dispose de deux équations :

$$\begin{aligned} &(E_1) \quad y' + a(t)y = b_1(t) \\ &(E_2) \quad y' + a(t)y = b_2(t) \end{aligned}$$

et que y_{P_1} et y_{P_2} sont des solutions particulières de chaque équation, alors $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$ est solution de :

$$(E) \quad y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$$

Démonstration

Cela est une conséquence directe de la ***linéarité*** de la dérivation c-à-d :

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (\lambda f)' &= \lambda f' \end{aligned}$$

III.1.5 – Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(t_0) = y_0$.

Résultat admis.

Remarques

1 ▶ En pratique, une condition initiale de la forme $y(t_0) = y_0$ permet tout simplement de calculer la constante λ figurant dans l'expression de la solution générale.

2 ▶ La donnée d'une équation différentielle (linéaire d'ordre 1) et d'une condition initiale s'appelle un ***problème de Cauchy***.

Exemple – Cherchons l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + ty = te^{t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

B16

Exercice H.9

Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} y'\cos(t)+y\sin(t)=1 \\ y(0)=2 \end{cases}$$

Exercice H.10

Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'-(t+1)(y+1)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Exercice H.11

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'-2y=\sin(2t)\mathrm{e}^t \quad (\mathrm{E})$$

Exercice H.12

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(1+t^2)y'-ty=\sqrt{1+t^2} \quad (\mathrm{E})$$

III.2 - Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

III.2.1 – Problématique

Une ***équation différentielle d'ordre*** 2 est une relation liant une fonction (inconnue) et ses deux premières dérivées. Précisément, il sera question dans ce paragraphe d'une équation différentielle de la forme :

$$(\mathrm{E}) \quad ay''+by'+cy=d(t)$$

où $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$, $a\neq 0$ et d est une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Résoudre l'équation (E) signifie trouver toutes les fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ sur I vérifiant :

$$\forall t\in \mathrm{I},\ \ ay''(t)+by'(t)+cy(t)=d(t)$$

À l'équation (E) est associée ***l'équation homogène*** (c'est à dire sans second membre) :

$$(\mathrm{E}_0) \quad ay''+by'+cy=0$$

Remarque – Attention, avec les notations (abusives mais pratiques) utilisées ici la variable t n'apparait même pas dans (E_0). Il faut donc bien avoir en tête que y est une fonction inconnue de la variable t.

III.2.2 – Théorème (Solution de l'équation homogène)

On note Δ le discriminant de l'***équation caractéristique*** $(\mathrm{E_C})$: $ar^2+br+c=0$.

(i) Si $\Delta\neq 0$ l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{K}$ sont les fonctions de le forme :

$$y_{\mathrm{H}} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda\mathrm{e}^{r_1 t}+\mu\mathrm{e}^{r_2 t} \end{array}$$

avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$.

(ii) Si $\Delta = 0$ l'équation caractéristique possède une racine doubles r_0 dans $\mathbb{K}$ et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{K}$ sont les fonctions de le forme :

$$y_H : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & (\lambda + \mu t)e^{r_0 t} \end{array}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$ l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions de le forme :

$$y_H : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t}\big(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\big) \end{array}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Résultat admis.

Exemples

1 ▶ Cherchons les solutions réelles de l'équation différentielle suivante : $y'' - y' - 2y = 0$.

B17

2 ▶ Cherchons les solutions réelles de l'équation différentielle suivante : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

B18

3 ▶ Cherchons les solutions réelles de l'équation différentielle suivante : $y'' + \omega^2 y = 0$ (utile en physique).

B19

III.2.3 – Proposition

Si y_P est une solution déjà connue de l'équation (E) (on parle d'une ***solution particulière***) alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $y_G = y_P + y_H$ où y_H est une solution (quelconque) de l'équation homogène (E_0) .

Démonstration

Mutatis mutandis, il s'agit de le même démonstration que pour une équation d'ordre 1.

Remarques

1 ▶ Ce résultat s'interprète de la manière suivante : la solution ***générale*** de l'équation (E) s'obtient en ajoutant une solution ***particulière*** de (E) et la solution ***générale*** de l'équation homogène (E_0) : $y_G = y_P + y_H$.

2 ▶ Pour expliciter les solutions de E, il est donc nécessaire de trouver au moins une solution particulière. Le principe général pour la recherche d'une solution particulière est le suivant : on la cherche ***de la même forme que le second membre***. Nous allons détailler quelques cas particulier dans la suite.

Méthode H.2 (Solution particulière pour un second membre exponentiel)

Pour une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = A e^{\lambda t}$$

on cherche une solution particulière sous la forme :

- $y_P : t \longmapsto B e^{\lambda t}$ si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- $y_P : t \longmapsto B t e^{\lambda t}$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique ;
- $y_P : t \longmapsto B t^2 e^{\lambda t}$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.

Remarque – En substance, il suffit donc de garder la même forme que le second membre mais éventuellement multiplier par t ou t^2 pour « compenser » le fait que α est racine de l'équation caractéristique.

Méthode H.3 (Solution particulière pour un second membre trigonométrique)

Pour une équation ***réelle*** de la forme :

$$ay'' + by' + cy = A\cos(\omega t) \qquad \text{ou} \qquad ay'' + by' + cy = A\sin(\omega t)$$

on cherche une solution sous la forme :

- $y_P : t \longmapsto B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$ si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- $y_P : t \longmapsto t\Big(B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)\Big)$ si $i\omega$ est racine simple de l'équation caractéristique.

Remarques

1 ▶ On admet que les formes précédentes permettent de trouver une solution particulière dans tous les cas.

2 ▶ Pour justifier les formes du cas trigonométrique on commence par poser $\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right)$ ou $\sin(\omega t) = \mathrm{Im}\left(e^{i\omega t}\right)$ et on comprend que l'on retombe sur un cas exponentiel avec comme exposant $\lambda = i\omega$.

3 ▶ En première lecture on pourrait s'étonner de l'absence du troisième cas (racine double) dans la cas trigonométrique. Mais cela s'explique facilement : si l'équation caractéristique a une racine double, il s'agit de $r_0 = -\frac{b}{a}$ qui est un nombre réel. Et l'exposant $\lambda = i\omega$ est lui imaginaire pur. Il ne peut donc pas y avoir égalité.

Exemples

1 ▶ Cherchons les solutions de l'équation différentielle (E) suivante : $y'' + y' - 6y = 6e^{-t}$.

B20

B20

2 ► Cherchons les solutions de l'équation différentielle (E) suivante : $y'' + y = 2\sin(t)$.

B21

B21

III.2.4 – Proposition (principe de superposition)

Avec les notations et hypothèses précédentes, si l'on dispose de deux équations :

$$\begin{array}{ll}(\mathrm{E}_1) & ay''+by'+cy=d_1(t)\\ (\mathrm{E}_2) & ay''+by'+cy=d_2(t)\end{array}$$

et que $y_{\mathrm{P}1}$ et $y_{\mathrm{P}2}$ sont des solutions particulières de chaque équation, alors $y_{\mathrm{P}} = y_{\mathrm{P}1} + y_{\mathrm{P}2}$ est solution de :

$$(\mathrm{E}) \quad ay''+by'+cy=d_1(t)+d_2(t)$$

Démonstration

Cela est une conséquence directe de la *linéarité* de la dérivation c-à-d :

$$(f+g)' = f'+g'$$
$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

III.2.5 – Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Pour tout $(t_0, y_0, y'_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$

Résultat admis.

Remarques

1 ▶ En pratique, des conditions initiales permettent tout simplement de calculer les constantes λ et μ figurant dans l'expression de la solution générale.

2 ▶ La donnée d'une équation différentielle (linéaire d'ordre 2) et deux conditions initiales s'appelle un ***problème de Cauchy***.

Exercice H.13

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''+y'+\frac{1}{2}y = \sin(t)\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$$

Exercice H.14

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sh}(2t) \quad \text{(E)}$$

Indication – *Principe de superposition.*

Exercice H.15

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2t} \quad \text{(E)}$$

III.3 - Exercices additionnels

Exercice H.16

1. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, déterminer la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

2. Déterminer toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u).$$

Indication – *Analyse/synthèse, dériver par rapport à l'une des variables.*

Exercice H.17

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = y + a \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(t) + \displaystyle\int_0^1 f(u)\,du \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Indication – *Analyse/synthèse.*

Fin du chapitre