Chapitre

J

Cours et exercices

Nombres réels et suites numériques

La première partie de ce chapitre sera consacrée aux propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Nous commencerons par faire le point sur la notion abstraite de relation d'ordre en introduisant quelques définitions nouvelles et un vocabulaire adapté. Nous nous intéresserons dans un second temps à ce que cela représente de manière un peu plus concrète dans le cas spécifique de l'ensemble des nombres réels.
Tout le reste du chapitre sera consacré aux suites numériques (essentiellement réelles). Le but sera de réinvestir et consolider les connaissances et compétences déjà acquises au lycée en ce qui concerne les suites.
Nous étudierons ensuite quelques exemples remarquables de suites : arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 ou bien définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Nous terminerons par une brève extension concernant les suites à valeurs complexes.

Sommaire

I – Propriétés de l'ordre dans l'ensemble des nombres réels

I.1 – Généralités sur les ensembles ordonnés

I.1.1 – Définition (relation binaire sur un ensemble)

Soit E un ensemble. On appelle ***relation binaire*** sur E toute application $\mathscr{R} : \mathrm{E}^2 \to \{0,1\}$.

Remarques

1 ▶ Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On dit que ***x est en relation avec y au sens de*** $\mathscr{R}$ si $\mathscr{R}(x, y) = 1$.

2 ▶ On écrira de manière équivalente : « $\mathscr{R}(x, y) = 1$ » ou « $x \mathscr{R} y$ » ou encore « $x \mathscr{R} y$ est vrai ».

3 ▶ Attention, cette définition n'est (a priori) pas symétrique car les couples (x, y) et (y, x) sont différents. Ainsi, il est possible que l'énoncé $x \mathscr{R} y$ soit vrai sans que $y \mathscr{R} x$ le soit.

I.1.2 – Définition (Relation d'ordre)

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est une ***relation d'ordre*** si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) Réflexivité : $\forall x \in \mathrm{E}, x\mathscr{R}x$

(ii) Transitivité : $\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}^3, \left(x\mathscr{R}y\right) \text{ ET } \left(y\mathscr{R}z\right) \Longrightarrow x\mathscr{R}z$

(iii) Antisymétrie : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \left(x\mathscr{R}y\right) \text{ ET } \left(y\mathscr{R}x\right) \Longrightarrow x = y$

Exemples

1 ▶ L'ensemble $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ des nombres réels est naturellement muni de la relation d'ordre $\mathscr{R} = \leqslant$. Notons que nous ne définissons pas ici cette relation d'ordre de manière précise, celle-ci provenant de la construction « abstraite » (hors programme) de l'ensemble $\mathbb{R}$. Mais nous sommes suffisamment familier avec cette relation d'ordre pour que cela ne pose aucun problème.

2 ▶ Si E est l'ensemble des mots de la langue française alors l'ordre ***lexicographique***, c'est à dire celui du dictionnaire est évidemment une relation d'ordre sur E.

3 ▶ Si E est un ensemble quelconque alors la relation d'inclusion $\mathscr{R} = \subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ (l'ensemble des parties de E).

Cela sera l'objet d'un exercice.

4 ▶ Sur $\mathrm{E} = \mathbb{N}$ la relation de divisibilité $\mathscr{R} = |$ est une relation d'ordre.

Cela sera l'objet d'un exercice.

I.1.3 – Définition (Ensemble ordonné)

Un ensemble ordonnée $\left(\mathrm{E}, \mathscr{R}\right)$ est la donnée d'un ensemble E et d'une relation d'ordre $\mathscr{R}$ sur E.

Exemple – Tous les exemples précédents $\left(\mathbb{R}, \leqslant\right)$, $\left(\mathscr{P}(\mathrm{X}), \subset\right)$, $\left(\mathbb{N}, |\right)$ sont des ensembles ordonnés.

Remarques

1 ▶ Si $(\mathrm{E}, \mathscr{R})$ est un ensemble ordonné et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ alors l'ordre sur E induit un ordre sur F (que l'on continuera de noter de la même façon). Par exemple l'ordre sur les nombres réels induits un ordre sur l'ensemble des nombre rationnels.

2 ▶ Il est très fréquent qu'une relation d'ordre soit notée $\leqslant$ même s'il ne s'agit pas de la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$. Il faudra donc faire attention au contexte pour comprendre ce qui signifie telle ou telle notation.

I.1.4 – Définition (Ordre total, ordre partiel)

(i) Une relation d'ordre $\leqslant$ sur un ensemble E est un ***ordre total*** si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables au sens de la relation $\leqslant$. En langage mathématique cela signifie que :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad x \leqslant y \text{ OU } y \leqslant x$$

(ii) Une relation d'ordre non totale est appelée ***ordre partiel***.

Exemples

1 ▶ L'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ est un ordre total.

2 ▶ L'ordre du dictionnaire est un ordre total. *Heureusement!*

Exercice J.1

La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est définie par :

$$a|b \overset{\text{déf}}{\iff} \exists k \in \mathbb{N},\ b = ka$$

1. Montrer que la relation $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
2. Cet ordre est-il total ou partiel ?

Exercice J.2

Soit E un ensemble non vide. On rappelle que la relation d'inclusion est définie sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ par :

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \big(\mathscr{P}(\mathrm{E})\big)^2,\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \overset{\text{déf}}{\iff} \big(\forall x \in \mathrm{E},\ x \in \mathrm{A} \Longrightarrow x \in \mathrm{B}\big)$$

1. Montrer que la relation $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.
2. Démontrer que cet ordre est partiel en donnant un exemple particulier.

I.1.5 – Définition (Maximum, minimum)

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et x_0 un élément de E.

(i) On dit que x_0 est le ***plus grand élément*** (ou ***maximum*** de E) si : $\forall x \in \mathrm{E},\ x \leqslant x_0$.
On note alors $x_0 = \max(\mathrm{E})$.

(ii) On dit que x_0 est le ***plus petit élément*** (ou ***minimum***) de E si : $\forall x \in \mathrm{E},\ x_0 \leqslant x$.
On note alors $x_0 = \min(\mathrm{E})$.

Remarques

1 ▶ Un ensemble peut ne pas avoir de plus petit ou plus grand élément (voir les exemples qui suivent).

2 ▶ En revanche, en cas d'existence, il y a nécessairement unicité du plus petit (resp. plus grand) élément (facile à démontrer).

Exemples

1 ▶ Le nombre 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$: $0 = \min(\mathbb{N})$.

2 ▶ Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas de plus grand élément.

3 ▶ Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas de plus petit élément.

4 ▶ Le plus grand élément de l'ensemble des mots de la langue française (pour l'ordre lexicographique) est le mot « zyzomys » (il s'agit d'une espèce de rongeur vivant en Australie et ayant quasiment disparue aujourd'hui).

5 ▶ Un segment $[a,b]$ $\big($avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b\big)$ a un plus petit élément $\big(a = \min([a,b])\big)$ et un plus grand élément $\big(b = \max([a,b])\big)$.

6 ▶ Un intervalle $[a,b[$ $\big($avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b\big)$ n'a pas de plus grand élément.

I.1.6 – Définition (Majorant, minorant)

Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

(i) On dit que $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ est un ***majorant*** de A si : $\forall x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.

(ii) On dit que $m \in \mathrm{E}$ est un ***minorant*** de A si : $\forall x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.

Remarques

1 ▶ On dit qu'une partie $A \subset E$ est majorée si elle possède au moins un majorant (dans E).

2 ▶ On dit qu'une partie $A \subset E$ est minorée si elle possède au moins un minorant (dans E).

3 ▶ Une partie peut ne pas être majorée (par exemple $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$).

4 ▶ Une partie peut ne pas être minorée (par exemple $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}$).

5 ▶ Une partie majorée peut avoir plusieurs majorants différents (par exemple 1 et 2 sont deux majorants de $[0,1]$).

6 ▶ Une partie minorée peut avoir plusieurs minorants différents (par exemple 0 et -1 sont deux minorants de $[0,1]$).

Exemples

1 ▶ Si A possède un plus grand élément $M = \max(A)$ alors c'est nécessairement un majorant de A.

2 ▶ Si A possède un plus petit élément $m = \min(A)$ alors c'est nécessairement un minorant de A.

3 ▶ Les réciproques des deux propriétés précédentes sont fausses en général : il existe des parties majorées sans plus grand élément (exemple $[0,1[$) et il existe des parties minorées sans plus petit élément (exemple $]0,1]$).

4 ▶ Dans $\mathbb{Z}$, toute partie non vide et majorée possède un plus grand élément (admis mais intuitivement évident).

5 ▶ Dans $\mathbb{Z}$, toute partie non vide et minorée possède un plus petit élément (admis mais intuitivement évident).

I.1.7 – Définition (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

(i) Si A est majorée et que l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément celui-ci est appelée ***borne supérieure*** de A et on le note $\sup(A)$.

(ii) Si A est minorée et que l'ensemble des minorants de A possède un plus grand élément celui-ci est appelée ***borne inférieure*** de A et on le note $\inf(A)$.

Exemples

1 ▶ Soit $E = \mathbb{R}$ et $A = [0,1[$.

B1

2 ▶ Soit $E = \mathbb{R}$ et $A =]0,1]$.

B2

I.1.8 – Proposition (Lien entre sup/max et min/inf)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

(i) Si A possède un plus grand élément alors c'est nécessairement la borne supérieure de A, autrement dit, on a dans ce cas $\max(A) = \sup(A)$.

(ii) Si A possède un plus petit élément alors c'est nécessairement la borne inférieure de A, autrement dit, on a dans ce cas $\min(A) = \inf(A)$.

Exemple – On a $\max\big([0,1]\big) = 1$ donc $\sup\big([0,1]\big) = 1$.

Remarque – La réciproque de la proposition précédente est fausse.

B3

I.1.9 – Proposition (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, A une partie non vide de E et $x_0 \in E$. Alors on a :

$$x_0 = \sup(A) \iff \begin{cases} (1) \quad \forall a \in A,\ a \leqslant x_0 \\ \qquad \text{ET} \\ (2) \quad \forall x \in E, x < x_0 \Longrightarrow \exists a \in A,\ x < a \end{cases}$$

Remarques

1 ▶ La propriété (1) traduit le fait que x_0 est un majorant de A.

2 ▶ La propriété (2) traduit le fait que tout élément strictement plus petit que x_0 n'est pas un majorant de A, ce qui signifie exactement que x_0 est le plus petit majorant possible de A.

I.1.10 – Proposition (Caractérisation de la borne inférieure)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, A une partie non vide de E et $x_0 \in E$. Alors on a :

$$x_0 = \inf(A) \iff \begin{cases} (1) \quad \forall a \in A,\ x_0 \leqslant a \\ \qquad \text{ET} \\ (2) \quad \forall x \in E, x_0 < x \Longrightarrow \exists a \in A,\ a < x \end{cases}$$

I.2 – Propriétés spécifiques à l'ensemble des nombres réels

I.2.1 – Théorème

(i) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

(ii) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.

(iii) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

(iv) Le sous-ensemble $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.

(v) Le sous-ensemble $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est ni minoré, ni majoré.

Résultat admis, provenant des constructions (hors programme) de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.

I.2.2 – Théorème

(i) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

(ii) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Résultat admis, provenant de la construction (hors programme) de $\mathbb{R}$.

I.2.3 – Proposition (Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$x_0 = \sup(A) \iff \begin{cases} (1) \quad \forall a \in A,\ a \leqslant x_0 \\ \qquad \text{ET} \\ (2) \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ x_0 - \varepsilon < a \end{cases}$$

Démonstration

C'est une simple réécriture de **I.1.10** dans le cas spécifique de $\mathbb{R}$.

Remarques

1 ▶ La propriété (1) traduit le fait que x_0 est un majorant de A et (2) traduit le fait qu'il n'en existe pas de plus petit.

2 ▶ On a un résultat analogue pour caractériser la borne inférieure.

Exercice J.3

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle $\leqslant$, étudier les sous-ensembles suivant en précisant s'ils sont minorés, majorés, possède un minimim, un maximum, une borne inférieure ou une borne supérieure.

1. $A = \left\{\frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. $B = \mathbb{Q} \cap \left]0,1\right[$
3. $C = \left\{(-1)^n + \frac{2}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice J.4 (Un théorème classique de point fixe)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante.
On pose :

$$A = \left\{x \in [a,b]\ /\ f(x) \leqslant x\right\}$$

1. Montrer que A est non vide.
2. En déduire l'existence de $c = \inf(A)$ et justifier le fait que $c \in [a,b]$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(c) \leqslant c$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(c) \geqslant c$.
5. En conclure que f possède au moins un point fixe.

I.2.4 – Théorème et Définition (Partie entière d'un nombre réel)

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $k \leqslant x < k+1$.

(ii) On dit que k est la ***partie entière de*** x et on écrit $k = \lfloor x \rfloor$.

Idée de la démonstration

Il résulte des propriétés de l'ordre sur $\mathbb{R}$ que l'ensemble A des entiers inférieurs ou égaux à x est non vide et possède un plus grand élément. Si on note k ce plus grand élément on a :

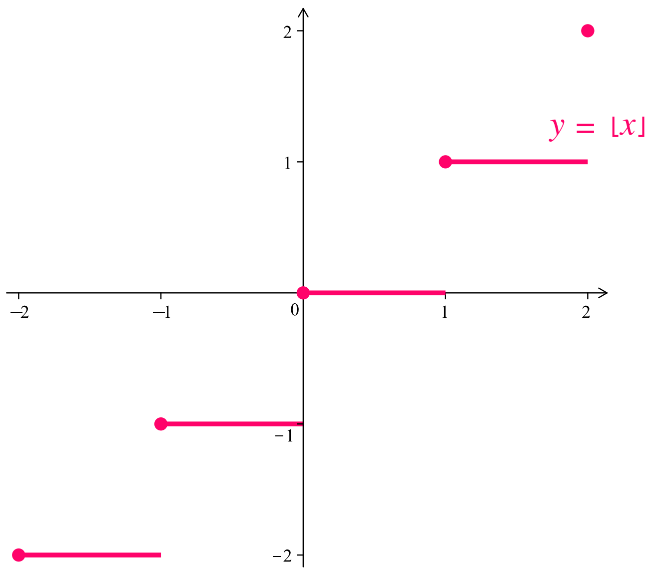
- $k \in A$ donc $k \leqslant x$
- $k+1 > x = \max(A)$ donc $k+1 \notin A$ et donc NON$(k+1 \leqslant x)$ c'est-à-dire $k+1 > x$.

Remarques

1 ▶ Attention au cas des nombres négatifs : $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$ mais $\lfloor -2,7 \rfloor = 3$.

2 ▶ L'encadrement de la définition s'écrit donc : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
On en déduit facilement le deuxième encadrement suivant : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

3 ▶ Voici la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ définie sur $\mathbb{R}$ (le graphe est ici limité à l'intervalle $[-2,2]$) :



Exercice J.5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ montrer que :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

Indication - Si on note $n = \lfloor x \rfloor$, distinguer les cas $x \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right[$ et $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n+1\right[$.

Exercice J.6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

I.3 – Droite numérique achevée

I.3.1 – Définition (Droite numérique achevée)

On appelle ***droite numérique achevée*** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

I.3.2 – Ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$

L'ordre naturel sur $\mathbb{R}$ se prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ en convenant que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ x < +\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}, \ -\infty < x \end{cases}$$

I.3.3 – Opérations algébriques dans $\overline{\mathbb{R}}$

Les opérations usuelles de $\mathbb{R}$ se prolongent de manière ***partielle*** à $\overline{\mathbb{R}}$.

Il est par exemple naturel de définir $1 + (+\infty) = +\infty$.
En revanche il n'y a pas de valeur naturelle pour $(+\infty) + (-\infty)$ (forme indéterminée).

Nous reviendrons sur ce point quand nous parlerons d'opérations sur les limites.

I.3.4 – Borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Toute partie non vide A de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure :

— si A est majorée par un nombre réel alors $\sup(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}$;

— sinon $\sup(\mathrm{A}) = +\infty$.

De même toute partie non vide A de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne inférieure :

- si A est minorée par un nombre réel alors $\inf(A) \in \mathbb{R}$;
- sinon $\inf(A) = -\infty$.

II – Généralités sur les suites

II.1 – Rappels et compléments

II.1.1 – « À partir d'un certain rang »

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. On dit que $\mathscr{P}(n)$ est vraie ***à partir d'un certain rang*** (***àpdcr***) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour tous les entiers $n \geqslant n_0$.

Par exemple $\mathscr{P}$ = « $n^2 > 30$ » est vraie à partir d'un certain rang. Ce rang est d'ailleurs $n_0 = 6$.

II.1.2 – Notion de suite

Une ***suite réelle*** est une application $u : A \to \mathbb{R}$ où A est une partie de $\mathbb{N}$.

Généralement on a $A = \mathbb{N}$. On rencontre aussi des suite définies sur $A = \mathbb{N}^*$ ou $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geqslant n_0\}$. La plupart des résultats seront énoncés avec $A = \mathbb{N}$.

On note alors $u = (u_n)$ pour désigner cette suite ou bien (suivant le cas) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

On dit aussi que u_n est le ***terme général*** de la suite u.

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- soit on donne une formule ***explicite*** donnant u_n en fonction de n ;
- soit on donne un on plusieurs des premiers termes de la suite ainsi qu'une ***relation de récurrence*** ;
- soit on définie u_n comme l'unique solution à une équation donnée (définition ***implicite***).

Exemples

1 ▶ La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 1$ peut s'écrire $(n^2-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 ▶ La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}$ peut s'écrire $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

3 ▶ Une suite est ***arithmétique*** de raison r si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.

4 ▶ Une suite est ***géométrique*** de raison q si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$.

5 ▶ On a déjà rencontré la suite u définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ qui est en fait la suite $\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6 ▶ Si $q \neq 1$, la suite u définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ n'est rien d'autre que la suite $\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.1.3 – Opérations sur les suites

Soit u, v deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) On appelle somme des suites u et v la suite s définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = u_n + v_n$. On la note $u + v$.

(ii) On peut définir de même $u - v$ et uv.

(iii) On appelle produit de la suite u par le réel λ la suite p définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \lambda u_n$. On la note λu.

(iv) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$ on appelle quotient des suites u et v la suite q définie par $\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. On la note $\dfrac{u}{v}$.

II.1.4 – Propriétés éventuelles d'une suite

On dit que le suite u est	**si**
majorée	
minorée	
bornée	
constante	
stationnaire	
croissante	
décroissante	
monotone	
strictement croissante	
strictement croissante	
strictement monotone	

Remarques

1 ▶ La suite u est bornée si et seulement si $\exists K \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, -K \leqslant u_n \leqslant K$, autrement dit si et seulement si la suite $|u|$ est majorée.

2 ▶ La suite u est constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$. En effet, il suffit alors de démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$.

3 ▶ Une suite est majorée (resp. minorée, bornée) si et seulement si elle l'est àpdcr. En effet si u est majorée par M à partir du rang n_0 alors $\max(M, u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1})$ est un majorant de u.

Exemples

1 ▶ Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Étudions son éventuelle monotonie.

Pour tout $n \geqslant 1$ on a :

B4

2 ▶ Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = -\dfrac{n^n}{n!}$. Étudions son éventuelle monotonie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a alors :

B5

3 ▶ La suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

II.2 – Limite

II.2.1 – Définition (Limite finie)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et ℓ un réel. On dit que la suite u ***admet*** $\ell \in \mathbb{R}$ ***pour limite*** ou encore qu'elle ***converge vers*** ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\quad u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

On écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarques

1 ▶ La condition $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ peut s'écrire de manière équivalente :

B6

2 ▶ Graphiquement, la définition signifie que tout intervalle centré sur ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

B7

Exemple – La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. Il suffit en effet de prendre $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

En effet :

B8

II.2.2 – Proposition (Unicité de la limite)

Si u a pour limite ℓ et ℓ' alors $\ell = \ell'$. Autrement dit la limite (si elle existe) est unique.

Démonstration

Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$ et par exemple que $\ell < \ell'$.

B9

II.2.3 – Définition

On dit qu'une suite u est ***convergente*** si elle admet une limite finie. Celle-ci étant unique on peut alors parler de ***la*** limite de u et on écrit alors :

$$\ell = \lim u = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Une suite non convergente est dite ***divergente***.

Exemples

1 ▶ Une suite constante est bien sûr convergente.

2 ▶ On vient de voir que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3 ▶ La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente. Démontrons le par l'absurde.

B10

Remarques

1 ▶ Une conséquence directe de la définition est que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

2 ▶ Il est clair également que (u_n) converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ converge vers 0 (car $u_n \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ si et seulement si $|u_n| \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$). On en déduit par exemple que la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.

3 ▶ Si u et v coïncident à partir d'un certain rang alors u converge si et seulement si v converge et dans ce cas la limite est la même. Autrement dit la notion de limite ne dépend pas des premiers termes d'une suite.

II.2.4 – Définition (Limite infinie)

(i) On dit que u a pour limite $+\infty$ ou encore que u tend vers $+\infty$ si

$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \mathrm{A} \leqslant u_n$$

On écrit alors $\lim u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou bien $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

(ii) On dit que u a pour limite $-\infty$ ou encore que u tend vers $-\infty$ si

$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \mathrm{A}$$

On écrit alors $\lim u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou bien $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

Exemple – La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n$ tend vers $+\infty$. En effet pour $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ il suffit de choisir $n_0 = \lfloor \mathrm{A} \rfloor + 1$.

En effet :

B11

Remarques

1 ▶ Attention au vocabulaire, une suite qui tend vers $\pm\infty$ est divergente.

2 ▶ On dira qu'une suite possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ si elle converge ou bien tend vers $\pm\infty$.

II.2.5 – Proposition (Limite d'une suite géométrique)

Soit $q \in \mathbb{R}$ et u la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.

(i) Si $q > 1$ alors $\lim u = +\infty$.

(ii) Si $q = 1$ alors $\lim u = 1$.

(iii) Si $-1 < q < 1$ alors $\lim u = 0$.

(iv) Si $q \leqslant -1$ alors u n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration (sauf pour le cas où $q < -1$)

B12

B12

II.3 – Propriétés élémentaires des suites convergentes

II.3.1 – Proposition

(i) Soit a, ℓ, c trois réels vérifiant $a < \ell < b$ et u une suite qui converge vers ℓ. Alors on a $a < u_n < b$ à partir d'un certain rang.

(ii) Une suite convergente est bornée.

(iii) Si u est une suite qui converge vers $\ell \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ et reste de signe constant à partir d'un certain rang.

Résultat admis (mais démonstration facile).

II.3.2 – Proposition

(i) Une suite divergente de limite $+\infty$ est toujours minorée.

(ii) Une suite divergente de limite $-\infty$ est toujours majorée.

Résultat admis (mais démonstration facile).

II.3.3 – Proposition (Passage à la limite dans une inégalité)

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'.

(i) Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.

(ii) Si u est majorée par M à partir d'un certain rang alors $\ell \leqslant \mathrm{M}$.

(iii) Si u est minorée par m à partir d'un certain rang alors $m \leqslant \ell$.

Démonstration

(i) Raisonnons par l'absurde.

B13

B13

(ii) Conséquencre de de ***(i)*** en prenant une des deux suite constante égale à M.

(iii) Conséquencre de de ***(i)*** en prenant une des deux suite constante égale à m.

Remarque – Si u converge vers ℓ, v vers ℓ' et que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, alors on a seulement $\ell \leqslant \ell'$ (et pas $\ell < \ell'$). Par exemple $u_n = \dfrac{-1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

II.4 – Opérations sur les limites

II.4.1 – Théorème

Soit u et v deux suites réelles.

(i) Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et v vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.

(ii) **[IMPORTANT]** Si u est bornée et v converge vers 0 alors uv converge vers 0.

(iii) Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et v vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors uv converge vers $\ell\ell'$.

(iv) Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $\dfrac{1}{u}$ est définie àpdcr et converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration

(i) Soit $\varepsilon > 0$ et écrivons la définition de la limite pour u et v avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$:

B14

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. La suite u étant bornée, il existe $K > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant K$. Comme la suite v converge vers 0 et que $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{K}$ est un réel strictement positif, par définition de la limite on a :

B15

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

B16

(iv) Supposons pour commencer $\ell > 0$.

B17

Dans le cas où $\ell < 0$, il suffit de considérer $v_n = -u_n \to \ell' = -\ell > 0$.

II.4.2 – Autres cas

a) Somme

Soit u et v deux suites ayant pour limites ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors la limite de $u+v$ est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$			
$\ell \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			

Le terme « **FI** » désigne une *forme indéterminée* ce qui signifie que toutes les situations peuvent *a priori* se produire.

b) Multiplication par une constante

Soit u une suite ayant une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et λ un réel. Alors la limite de λu est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

λ \ ℓ	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$			
0			
$\lambda > 0$			

c) Produit

Soit u et v deux suites ayant pour limites ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors la limite de uv est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	$\ell' < 0$	$\ell = 0$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$					
$\ell < 0$					
0					
$\ell > 0$					
$+\infty$					

d) Inverse

Soit v une suite ayant pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et telle que v_n soit non nul à partir d'un certain rang. Alors la limite de la suite $\frac{1}{v}$ (définie à partir d'un certain rang) est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

ℓ	$-\infty$	$\ell < 0$	0^-	0	0^+	$\ell > 0$	$+\infty$
$\lim \frac{1}{v}$							

Dans ce tableau la notation $\lim v = 0^+$ signifie que v tend vers 0 **et** que v_n reste positif à partir d'un certain rang. De même pour la notation 0^-.

Remarque – En combinant les deux tableaux précédents (produit et inverse) on peut déterminer la limite (si elle existe) d'un quotient $\frac{u}{v}$ en écrivant $\frac{u}{v} = \frac{1}{v} \times u$.

III – Théorèmes de convergence

III.1 – Limite par encadrement

III.1.1 – Théorème (d'encadrement ou des gendarmes)

Soit u, v, w trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang. Si u et w converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors v converge et $\lim v = \ell$.

Démonstration

B18

Remarque – En pratique, pour montrer que $\lim u = \ell$ on majore $|u_n - \ell|$ par une quantité qui tend vers 0. On en déduit alors d'après le résultat précédent que $|u_n - \ell|$ tend vers 0, donc que $u_n - \ell$ tend vers 0 et donc que u_n tend vers ℓ.

Il existe un résultat analogue pour des suites ayant une limite infinie.

III.1.2 – Théorème

Soit u et v deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

(i) Si u tend vers $+\infty$ alors v aussi.

(ii) Si v tend vers $-\infty$ alors u aussi.

Démonstration analogue, non détaillée ici.

III.2 – Suites extraites

III.2.1 – Introduction

Considérons une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on représente dans un tableau infini :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$
u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	$\cdots$	u_k	u_{k+1}	$\cdots$

Imaginons maintenant que l'on ne s'intéresse qu'à ***certains termes*** de la suite u. Par exemple :

— on garde le premier u_0 ;
— on écarte **le** suivant u_1 ;
— on garde le suivant u_2 ;
— on écarte **les deux** suivants u_3 et u_4 ;
— on garde le suivant u_5 ;
— on écarte **les trois** suivants u_6, u_7 et u_8 ;
— on garde le suivant u_9 ;
— on écarte les **quatre suivants** u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13} ;
— on garde le suivant u_{14} ;
— *etc.*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\cdots$
u_0		u_2			u_5				u_9					u_{14}	$\cdots$

On obtient une nouvelle suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont :

$$v_0 = u_0 \quad v_1 = u_2 \quad v_2 = u_5 \quad v_3 = u_9 \quad v_4 = u_{14}$$

Une telle suite v est appelée ***suite extraite*** de la suite u. La numérotation peut se formaliser à l'aide d'une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui, compte tenu des premiers termes, vérifie :

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 2 \quad \varphi(2) = 5 \quad \varphi(3) = 9 \quad \varphi(4) = 14$$

Comment passe-t-on de $\varphi(n-1)$ à $\varphi(n)$? Tout simplement en ajoutant $n+1$. On en déduit que :

$$\varphi(n) = 2+3+4+5+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2+3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

> *Au delà de l'exemple présenté ici, il faut garder en tête que la fonction de numérotation (c'est à dire φ) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et que celle-ci est **strictement croissante**. En effet nous faisons nos choix (de garder ou écarter certains termes) en nous déplaçant de la gauche vers la droite (nous ne revenons pas en arrière).*

III.2.2 – Définition

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite extraite*** (ou ***sous-suite***) de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ***strictement croissante*** telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemples

1 ▶ Si φ est définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = 2n$ on obtient la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constituée des termes de rang pair de u. Par exemple si u est donnée par $u_n = (-1)^n$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.

2 ▶ De même si φ est définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = 2n+1$ on obtient la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constituée des termes de rang impair de u. Par exemple si u est donnée par $u_n = (-1)^n$ alors $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1.

III.2.3 – Lemme

Si φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$$

Démonstration

B19

III.2.4 – Proposition

Si u est une suite qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite v extraite de u tend aussi vers ℓ.

Démonstration du cas $\ell \in \mathbb{R}$

B20

Remarque – Pour prouver qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite (finie ou infinie) il suffit de prouver quelle possède deux suites extraites qui tendent vers des limites différentes.

Exemples

1 ▶ La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas car $u_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.

2 ▶ Reprenons l'exemple d'une suite u géométrique *i.e.* telle que $u_n = q^n$ avec $q < -1$. Posons $a = -q$ de sorte que $q = -a$ avec $a > 1$. Ainsi $u_n = (-1)^n a^n$, $u_{2n} = a^{2n}$ et $u_{2n+1} = -a^{2n+1}$. On en déduit alors que u_{2n} tend vers $+\infty$ et u_{2n+1} tend vers $-\infty$, ce qui prouve que la suite u n'a pas de limite.

III.2.5 – Proposition

Une suite u tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ***si et seulement si*** $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ.

Résultat admis, mais à connaitre absolument.

III.3 – Composition par une fonction

III.3.1 – Théorème

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que a soit un élément ou une extrémité de I.

On suppose que f est une fonction définie sur I telle que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ et que (x_n) est une suite d'éléments de I qui tend vers a. Alors $f(x_n)$ tend vers b.

Démonstration

Voir le chapitre consacré aux limites pour les fonctions.

Exemples

1 ▶ Un cas particulier important est celui d'une fonction f ***continue*** avec $a \in$ I. Dans ce cas la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

2 ▶ La suite u définie par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ converge vers 0. Il suffit en effet d'appliquer le théorème avec $f = \exp$, $a = -\infty$ et $b = 0$.

3 ▶ La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers $-\infty$. Il suffit en effet d'appliquer le théorème avec $f = \ln$, $a = 0^+$ et $b = -\infty$.

III.3.2 – Proposition

Soit u une suite réelle.

(i) u converge vers 0 si et seulement si $|u|$ converge vers 0.

(ii) Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $|u|$ converge vers $|\ell|$. La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$.

Résultat admis, mais à connaitre absolument.

III.4 – Suites monotones

III.4.1 – Théorème (de la limite monotone)

Soit u une suite monotone.

(i) Si u est croissante et majorée alors elle converge.

(ii) Si u est décroissante et minorée alors elle converge.

Démonstration

B21

B21

Exemple – Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

B22

B22

Remarque – Nous verrons plus tard que $\lim u = \mathrm{e}\ (= \exp(1))$.

III.4.2 – Corollaire

Soit u une suite monotone.

(i) Si u est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

(ii) Si u est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$

Démonstration de *(i)*

B23

Exercice J.7

Étudier la convergence des suites définies par :

1. $v_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

2. $w_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

Exercice J.8

Étudier la convergence des suites définies par :

1. $u_n = \sqrt{n + \cos(n)} - \sqrt{n}$

2. $v_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$

Exercice J.9

Étudier la convergence de la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$$

Exercice J.10

Montrer que la suite définie par $u_n = \dfrac{5n^2+\sin(n)}{3(n+2)^2\cos(\frac{n\pi}{5})}$ n'a pas de limite.

Exercice J.11

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ étudier la convergence de la suite u définie par :

$$u_n = \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}$$

Exercice J.12

Nous allons démontrer que la suite de terme général $u_n = \sin(n)$ n'a pas de limite. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant au contraire que :

$$\sin(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$$

1. Compléter la formule de trigonométrie suivante :

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) =$$

En déduire que $\cos(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis que $\ell = \pm 1$.

2. Compléter la formule de trigonométrie suivante :

$$\sin(2n) =$$

En déduire que $\ell = 0 = \pm 1$. Conclure.

III.5 – Suites adjacentes

III.5.1 – Définition (Suites adjacentes)

Deux suites a et b sont dites ***adjacentes*** si a est croissante, b décroissante et si $b - a$ converge vers 0.

III.5.2 – Théorème (Des suites adjacentes)

Si a et b sont deux ***suites adjacentes*** alors :

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$;

(ii) a et b convergent vers une limite commune ℓ ;

(iii) $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, a_n \leqslant \ell \leqslant b_k$.

Démonstration

B24

B24

Exemple – Soit (a_n) et (b_n) les deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes.

B25

Remarque - Vous verrez sans doute l'année prochaine que la limite commune de a et b vaut $\ln(2)$.

Exercice J.13 (Suites adjacentes)

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. *Elles ont donc une limite commune que l'on notera ℓ.*
2. ***a)*** Écrire une fonction Python `u(n)` prenant en argument un entier naturel `n` et renvoyant la valeur de la somme u_n.
   b) Tester cette fonction pour différentes valeurs de n. Quelle conjecture faire quant à la valeur du nombre ℓ ?
3. On souhaite démontrer que $\ell \notin \mathbb{Q}$. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $\ell = \frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Montrer alors qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $an!$ ne soit pas entier puis conclure.

Exercice J.14 (Approximations décimales d'un nombre réel)

On fixe un nombre réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$p_n = \lfloor x10^n \rfloor$$
$$a_n = \frac{p_n}{10^n}$$
$$b_n = \frac{1+p_n}{10^n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que ces deux suites sont adjacentes.
3. Quelle est la limite commune de ces deux suites ? En déduire que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres décimaux.
4. **Densité de $\mathbb{D}$ dans** $\mathbb{R}$ - Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. Montrer que l'intervalle $]\alpha, \beta[$ contient au moins un nombre décimal.
5. **Densité de $\mathbb{Q}$ dans** $\mathbb{R}$ - Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. Montrer que l'intervalle $]\alpha, \beta[$ contient au moins un nombre rationnel.

IV – Exemples remarquables de suites

IV.1 – Suites arithmético-géométriques

IV.1.1 – Définition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Remarques

1 ▶ Si $a = 1$ la suite est arithmétique de raison b.

2 ▶ Si $b = 0$ la suite géométrique de raison a.

IV.1.2 – Méthode d'étude

a) Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique donc la situation est connue.

b) Sinon il existe un unique réel c vérifiant $c = ac + b$. On a en effet :

$$\begin{aligned} c = ac + b &\iff c(1-a) = b \\ &\iff c = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

L'idée est alors de s'intéresser à la suite v définie par $v_n = u_n - c$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + b \\ c &= ac + b \end{cases}$$

Par différence on a donc $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$ ce qui prouve que la suite $v = u - c$ est géométrique de raison a. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - c = a^n \left(u_0 - c\right)$$
$$u_n - \frac{b}{1-a} = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$
$$u_n = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}$$

Remarque – C'est la **méthode** présentée ici qui est à **retenir**, pas la formule obtenue.

Exemple – Considérons la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 1 \end{cases}$$

On cherche à exprimer u_n de manière explicite en fonction de n.

B26

IV.2 – Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

IV.2.1 – Définition

On dit que qu'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une ***relation de récurrence linéaire d'ordre*** 2 s'il existe deux réels a et b (avec $b \neq 0$) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

Pour tout couple (a, b) fixé nous noterons $\mathscr{S}_{a,b}$ l'ensemble des suites réelles vérifiant cette relation de récurrence.

Exemple – La suite de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Avec les notations précédentes, cette suite est un élément de l'ensemble $\mathscr{S}_{1,1}$

Exercice J.15 (Un peu de Python avec la suite de Fibonacci)

1. Écrire une fonction Python ***récursive*** `fibo_rec(n)` qui calcule F_n de manière récursive.
   Faire afficher tous les couples (k, F_k) pour $k \in [\![0, 36]\!]$.
2. Écrire une fonction Python ***itérative*** `fibo_it(n)` qui calcule F_n de manière récursive.
   Faire afficher tous les couples (k, F_k) pour $k \in [\![0, 100]\!]$.

IV.2.2 – Proposition

Soit a et b deux réels fixés (avec $b \neq 0$).

(i) Si u et v appartiennent à $\mathscr{S}_{a,b}$ alors il en est de même de $u + v$.

(ii) Si u appartient à $\mathscr{S}_{a,b}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la suite λu appartient aussi à $\mathscr{S}_{a,b}$

(iii) Si u et v appartiennent à $\mathscr{S}_{a,b}$ avec $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors $u = v$.

(iv) La suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{S}_{a,b}$ si et seulement si $r^2 - ar - b = 0$.

Résultat admis (mais démonstration facile).

IV.2.3 – Définition

On dit que $r^2 - ar - b = 0$ est ***l'équation caractéristique*** de la relation de récurrence.

Exemple – Pour la suite de Fibonacci, l'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$.

IV.2.4 – Théorème (Suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2)

Soit a, b deux réels (avec $b \neq 0$), u une suite de $\mathscr{S}_{a,b}$ et notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.

(i) Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles r_1 et r_2 et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

(ii) Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + n\mu) r_0^n$$

(iii) Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguée $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ et et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big)$$

Résultat admis (pour l'instant en tout cas).

Exemples

1 ▶ On considère la suite réelle u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

On cherche à exprimer u_n de manière explicite en fonction de n.

B27

2 ▶ On considère la suite réelle u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

On cherche à exprimer u_n de manière explicite en fonction de n.

B28

Exercice J.16 (Suite de Fibonacci)

Soit F le suite de Fibonacci définie par $\mathrm{F}_0 = 0, \mathrm{F}_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$.

1. Exprimer F_n en fonction de n.

2. Étudier la convergence des suites $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Exercice J.17 (Autres suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Expliciter u_n en fonction de n et étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{7}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{7}{6}\,u_{n+1} - \frac{1}{3}\,u_n$.

2. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

3. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n$.

IV.3 – Suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

IV.3.1 – Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ (**important : f va d'un intervalle dans lui même**) une fonction continue.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si la suite u converge vers $\ell \in \mathrm{I}$ alors on a nécessairement $f(\ell) = \ell$.

Démonstration

B29

Remarques

1 ▶ Même s'il existe $\ell \in \mathrm{I}$ tel que $f(\ell) = \ell$ il n'est ***pas du tout*** assuré que la suite converge vers ℓ.

2 ▶ En revanche, s'il n'existe pas de nombre $\ell \in \mathrm{I}$ vérifiant $f(\ell) = \ell$, on peut affirmer que la suite ne converge pas.
Exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

B30

IV.3.2 – Problématique

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

But – Prouver que la suite est bien définie et étudier l'existence d'une limite pour celle-ci.

IV.3.3 – Méthode d'étude

Essentiellement, il s'agit d'étudier les points suivants :

— identifier la fonction f et étudier ses variations ;

— déterminer un intervalle J stable par f c'est à dire tel que $f(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$ et tel que $u_0 \in \mathrm{J}$;

— déterminer les nombres $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $f(\ell) = \ell$ $\big($éventuellement tels que $f \circ f(\ell) = \ell\big)$;

— comparer u_0 et u_1 et utiliser la monotonie de f pour étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\big($éventuellement de $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}\big)$;

— conclure grâce au théorème de la limite monotone $\big($et éventuellement le théorème **III.2.5** dans le cas de deux suites extraites qui « couvrent » la suite d'origine en entier).

IV.3.4 – Un exemple où f est croissante

Étudier le comportement asymptotique de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{5} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

Solution

B31

IV.3.5 – Un exemple où f est décroissante

Étudier le comportement asymptotique de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1+2u_n} \end{cases}$$

Solution

B32

Exercice J.18

Soit f la fonction de la variable réelle définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $]0,2]$.
2. Montrer que la suite (u_n) reste dans l'intervalle $\left[\sqrt{2},2\right]$ c'est à dire que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sqrt{2}\leqslant u_n\leqslant 2$$

3. Comparer u_0 et u_1, puis u_n et u_{n+1} pour tout entier $n\in\mathbb{N}$. En déduire que (u_n) est monotone et préciser son sens de variation.
4. Justifier la convergence de la suite (u_n) et déterminer la limite de celle-ci.
5. Écrire une fonction Python `suite(n)` prenant comme argument un entier naturel n et qui renvoie u_n.

Exercice J.19

On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n^2+2}{3u_n} \end{cases}$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x^2+2}{3x}$$

2. Vérifier que $\mathrm{I}=[1,+\infty[$ est un intervalle stable par f. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et reste dans I.
3. Déterminer le(s) solution(s) dans I de l'équation $f(x)=x$. On constatera qu'il y a une unique solution $\ell\in\mathrm{I}$.
4. Vérifier que l'intervalle $\mathrm{J}=[1,\ell]$ est également stable par f. En déduire que la suite (u_n) reste dans J.
5. Comparer u_0 et u_1. En déduire (en donnant tous les détails) que (u_n) est monotone.
6. En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice J.20

On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{3}{2u_n^2+1} \end{cases}$$

1. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3}{2x^2+1}$.
2. Montrer que l'intervalle $[0,3]$ est stable par f. En déduire que la suite est bien définie et que ses termes appartiennent tous à $[0,3]$.
3. Comparer u_0 et u_2, en déduire (en donnant tous les détails) que la suite extraite $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis qu'elle converge vers une limite notée ℓ.
4. Comparer u_1 et u_3 ***sans aucun calcul***, en déduire que la suite extraite $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est monotone puis qu'elle converge vers une limite notée ℓ'.
5. Justifier que ℓ et ℓ' sont solution de l'équation $f\circ f(x)=x$.
6. Résoudre l'équation $f(x)=x$. Montrer que les solutions de cette équation sont aussi solution de $f\circ f(x)=x$. En déduire l'ensemble des solutions de $f\circ f(x)=x$. Calculer ensuite les images par f des solutions trouvées.

7. Dresser le tableau de variations de $f \circ f$ sur $[0,3]$ en faisant figurer tous les points particuliers trouvés précédemment.

8. Déterminer un intervalle stable par $f \circ f$, contenant u_0 et une seule des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. En déduire la valeur de ℓ.

9. Déterminer un intervalle stable par $f \circ f$, contenant u_1 et une seule des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. En déduire la valeur de ℓ'.

10. Comparer ℓ et ℓ'. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

V – Suites à valeurs complexes

V.1 – Définitions

V.1.1 – Définition

Une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On lui associe :

— sa partie réelle qui est la suite réelle $\Big(\mathrm{Re}(z_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$;

— sa partie imaginaire qui est la suite réelle $\Big(\mathrm{Im}(z_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$;

— sa suite conjuguée qui est la suite complexe $\left(\overline{z_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

— la suite des modules qui est la suite réelle $\Big(|z_n|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$.

V.1.2 – Définition (Propriétés éventuelles d'une suite complexe)

(i) On dit que la suite z est bornée s'il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| \leqslant \mathrm{K}$$

(ii) On dit que la suite z converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarques

1 ▶ La notion de suite monotone n'a plus de sens dans $\mathbb{C}$.

2 ▶ La notion de limite infinie n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$.

V.2 – Quelques résultats

V.2.1 – Résultats analogues au cas réel

Certains résultats restent vrais pour les suites à valeurs complexes :

— toute suite convergente est bornée ;

— opérations sur les limites (finies) ;

— une suite extraite d'une suite convergente est elle même convergente vers la même limite.

V.2.2 – Théorème

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors on a l'équivalence :

$$z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Résultat admis.

VI – Exercices additionels

Exercice J.21 (Suite définie de manière implicite (Banque PT))

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $nx = \cos(x)$ possède une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on notera x_n.
2. Sans chercher à expliciter x_n, montrer que la suite (x_n) converge vers 0.

Exercice J.22 (Suite définie de manière implicite (Banque PT))

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $g_n(x) = x^n + nx - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g_n(u_n) = 0$.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n).
3. Étudier la convergence de la suite (u_n^n).

Exercice J.23 (Un dernier pour la route : résultats à connaitre, c'est du cours)

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Si $a > 1$ (exemple $a = \mathrm{e}$) démontrer que la suite $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Conclusion - On a donc une *hiérarchie* en terme de ***négligeabilité*** :

$$\ln(n) \ll n \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Remarque - Chercher « puissances itérées de Knuth » sur le web : c'est l'explosion totale !

Fin du chapitre