Chapitre

L

# Dérivabilité

Cours et exercices

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons aborder la notion fondamentale de dérivabilité pour une fonction de la variable réelle. Nous nous appuierons sur le travail commencé au lycée mais en reprenant les choses sous une forme plus précise et plus rigoureuse. Ensuite, la deuxième partie du chapitre sera consacrée à des théorèmes fondamentaux en analyse, le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis, ainsi qu'à leurs applications.

**Sommaire**



## I – Dérivabilité, fonction dérivée

### I.1 – Dérivabilité en un point

#### I.1.1 – Cadre général de travail

Nous allons travailler avec des fonctions $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ où A est :

- soit un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points (l'ensemble vide et les singletons sont donc écartés) ;
- soit une réunion ***disjointe*** d'une nombre ***fini*** de tels intervalles.

La dérivabilité d'une telle fonction sera étudiée en un point $a \in \mathrm{A}$. Mais nous nous intéresserons aussi de temps en temps à la possibilité de prolonger $f$ en un point $b \in \mathbb{R}$ qui est une borne de l'un des intervalles composant A et à la dérivabilité en $b$ de la fonction ainsi prolongée.

Gardons néanmoins en tête que le cas le plus fréquent est celui où A est un simple intervalle. Dans ce cas nous utiliserons plus volontiers la notation I.

**Remarque –** On rencontrera de temps en temps des fonctions définies sur la réunion d'un nombre ***infini*** d'intervalles. La fonction tangente est par exemple définie sur :

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) = \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

Mais s'autoriser, dans le cadre général, à étudier des fonctions sur des réunions infinie d'intervalles pose des problèmes de « topologie » (notamment en terme de « points d'accumulation ») qui sont totalement hors-programme.

### I.1.2 – Définition

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$.

***(i)*** On dit que $f$ est ***dérivable*** en $a$ si la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & \mathrm{A} \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

(appelée taux d'accroissement de $f$ au point $a$) possède une limite ***finie*** quand $x$ tend vers $a$.

***(ii)*** Dans ce cas cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée ***nombre dérivé*** de $f$ en $a$.

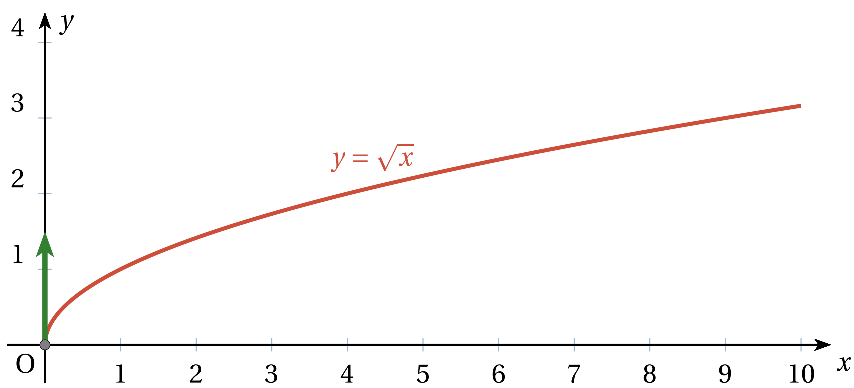
**Remarque –** En pratique, lors de la résolution d'un exercice, il est fréquent de revenir à cette définition lorsqu'il est demandé d'étudier la dérivabilité en un point ***particulier***.

**Exemples**

**1 ►** Soit $f$ la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$. En quel(s) point(s) est elle dérivable ? Que vaut sa dérivée ?

**Solution**

B1



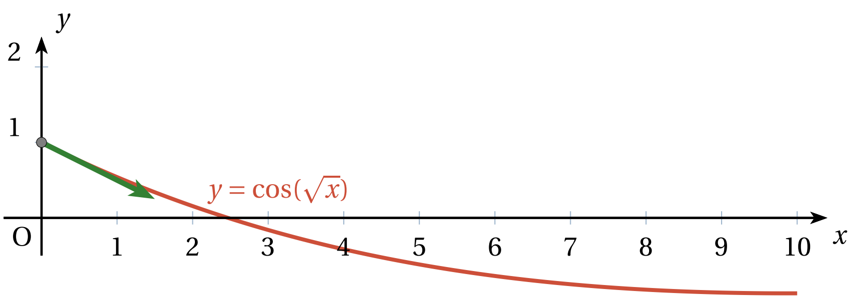
**2 ▶** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \cos(\sqrt{x})$. Est-elle dérivable en 0 ? Que vaut son éventuelle dérivée en ce point ?

**Fausse solution**

B2

**Solution correcte**

B3




**3 ▶** Rebondissons sur la démonstration précédente. Comment avions-nous obtenu la limite usuelle contenant le cosinus ?

B4

**4 ▶** Nouvelle question, comment avait on établie la limite suivante :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

On avait écrit :

B5

Mais c'était, en réalité, une énorme **arnaque** !

En effet, comment sait-on que $\sin' = \cos$ ? Et que $\cos' = -\sin$ ? L'avez-vous un jour démontré ? Et au fait pourquoi les fonctions sinus et cosinus seraient dérivables ? Et même continues ?

Comme tout cela ne tiens pas en quelques lignes, c'est l'objet d'un complément de cours (voir mon site `www.bejian.fr/cours.html`).

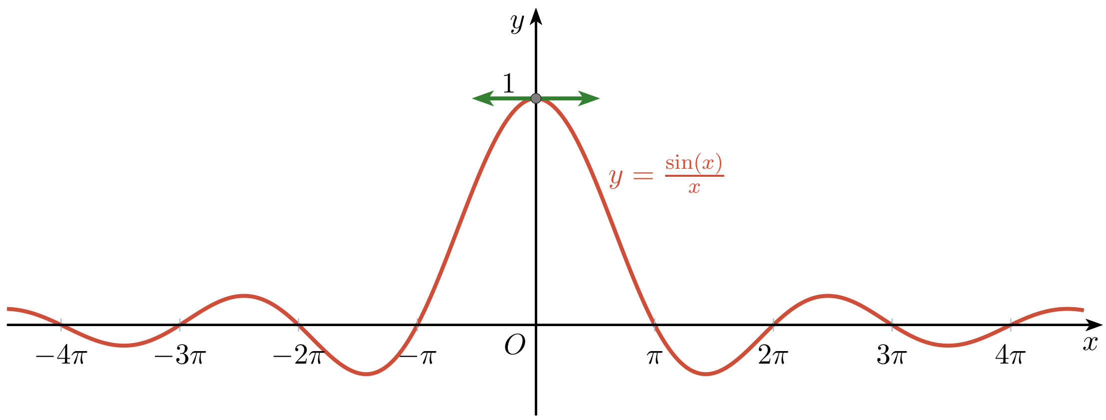
**5 ▶** Si on sait que $h : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ a pour limite 1 en 0 on peut prolonger $h$ par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$. Cette fonction (appelée ***sinus cardinal***) est-elle dérivable en 0 ?

**Solution**

Pour faire cette étude, nous manquons cruellement d'outils suffisamment puissants. Anticipons un peu (beaucoup) sur un des chapitres de fin d'année consacré aux ***développements limités***. On y montrera notamment l'existence d'une fonction $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x)$, de limite nulle en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$$

B6



### I.1.3 – Définition (Développement limité d'ordre 1)

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$. On dit que $f$ possède un ***développement limité*** d'ordre 1 au point $a$ $\big($en abrégé $\mathrm{DL}_1(a)\big)$ s'il existe une fonction $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x)$ de limite nulle en $a$ et deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ f(x) = \alpha + \beta(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

### I.1.4 – Proposition

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$. Sont équivalentes :

***(i)*** la fonction $f$ est dérivable en $a$ ;

***(ii)*** la fonction $f$ possède un $\mathrm{DL}_1(a)$ au point $a$.

Dans ce cas, les deux coefficients du $\mathrm{DL}_1(a)$ sont nécessairement $\alpha = f(a)$ et $\beta = f'(a)$.

### Démonstration

B7

### I.1.5 – Définition (Dérivabilité à droite ou à gauche)

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$.

***(i)*** On suppose que $f$ est définie au voisinage à droite de $a$, autrement dit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[a, a+\delta] \subset \mathrm{A}$. On dit que $f$ est ***dérivable à droite*** en $a$ si :

$$\tau_a : x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

possède une limite finie à droite en $a$. Dans ce cas on écrit :

$$f'_d(a) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \tau_a(x)$$

***(ii)*** On suppose que $f$ est définie au voisinage à gauche de $a$, autrement dit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[a-\delta, a] \subset \mathrm{A}$. On dit que $f$ est ***dérivable à gauche*** en $a$ si :

$$\tau_a : x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

possède une limite finie à gauche en $a$. Dans ce cas on écrit :

$$f'_g(a) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \tau_a(x)$$

### Remarques

1 ▶ Si A = I est un intervalle dire que $f$ est définie au voisinage à droite de $a$ revient à dire que $a \neq \sup(\mathrm{I})$.

2 ▶ Si A = I est un intervalle dire que $f$ est définie au voisinage à gauche de $a$ revient à dire que $a \neq \inf(\mathrm{I})$.

3 ▶ Si A = I est un intervalle et $a = \sup(\mathrm{I})$ alors la dérivabilité de $f$ en $a$ est équivalente à la dérivabilité de $f$ en $a$ à gauche (puisque $f$ n'est pas définie à droite de $a$).

4 ▶ Si A = I est un intervalle et $a = \inf(\mathrm{I})$ alors la dérivabilité de $f$ en $a$ est équivalente à la dérivabilité de $f$ en $a$ à droite (puisque $f$ n'est pas définie à gauche de $a$).

### I.1.6 – Proposition (Lien entre dérivabilité à droite et à gauche et la dérivabilité tout court)

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$ un point tel qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant $[a-\delta, a+\delta] \subset \mathrm{A}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} \textbf{\textit{(i)}}\ f \text{ est dérivable en } a \text{ à droite} \\ \quad \text{ET} \\ \textbf{\textit{(ii)}}\ f \text{ est dérivable en } a \text{ à gauche} \\ \quad \text{ET} \\ \textbf{\textit{(iii)}}\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ce cas on a évidemment $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$.

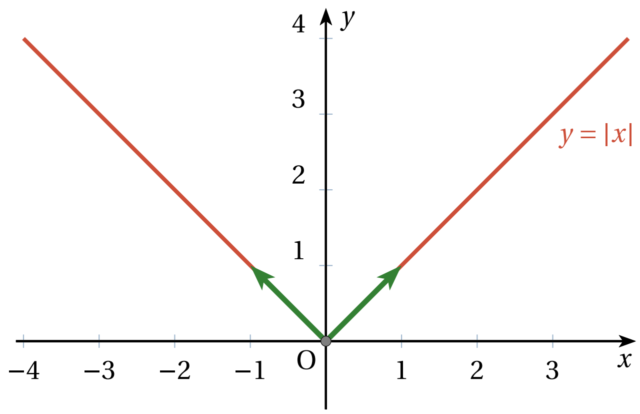
### Exemples

1 ▶ Étudions la dérivabilité en 0 de la fonction valeur absolue :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

#### Solution

B8



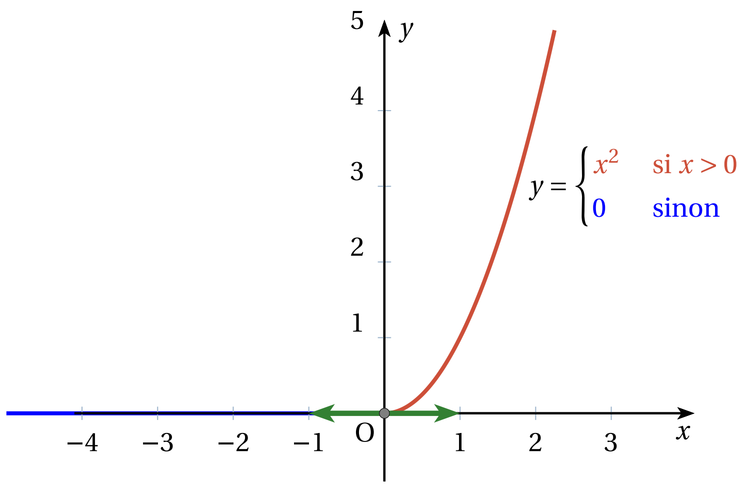

**2 ▶** Étudions la dérivabilité en 0 de la fonction suivante :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

### Solution

B9

**Remarque -** On a ici un exemple de *raccordement dérivable* entre deux fonctions.



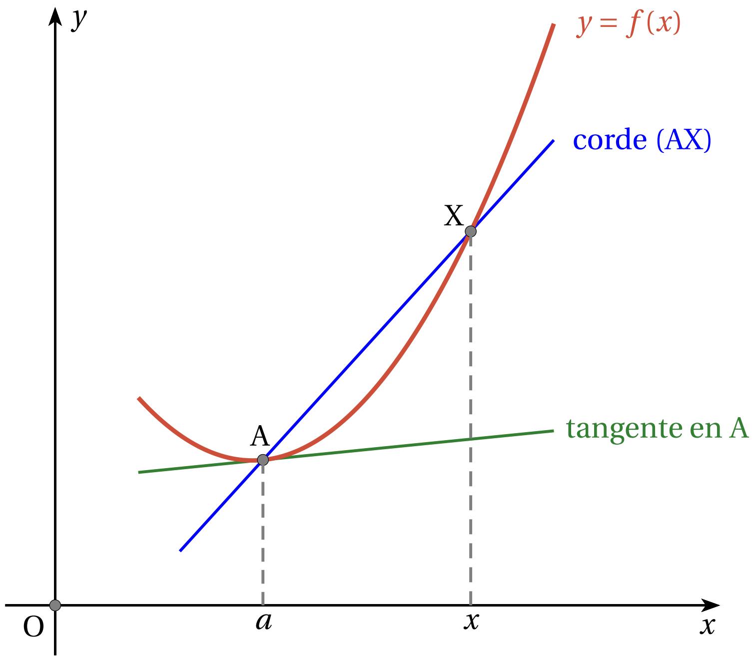
### I.1.7 – Interprétation graphique

Si A et X sont les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse respectives $a$ et $x$, on constate que $\tau_a(x)$ est la **pente** de la droite (AX).

L'existence d'une limite pour $\tau_a(x)$ signifie l'existence d'une *position limite* pour la droite (AX) lorsque $x$ tend vers $a$. Le fait que cette limite soit **finie** signifie que cette position limite n'est **pas verticale** (en cas de dérivabilité).

Cette droite limite (si elle existe), est appelée *tangente* à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$ (*i.e.* le point A).

Elle a pour pente $f'(a)$ et comme elle passe par le point A de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ elle a pour équation cartésienne $y = f(a) + f'(a)\big(x-a\big)$ ou encore $y = \alpha + \beta(x-a)$ où $\alpha$ et $\beta$ sont les coefficients du $\mathrm{DL}_1(a)$ de $f$.




### Remarques

1 ▶ Si on constate l'existence d'une tangente verticale à la courbe d'une fonction cela implique que cette fonction n'est **pas** dérivable au point correspondant.

2 ▶ Dans le cas de l'existence d'une dérivée à droite ou à gauche on parle de *demi-tangente* (à droite ou à gauche). Elles peuvent éventuellement être différentes (par exemple pour la fonction valeur absolue en 0) : dans ce cas on parle de *point anguleux*.

### I.1.8 – Interprétation cinématique

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathrm{I}$ et

$$f : \begin{array}{rcl} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$$

représente la position d'un point mobile sur un axe alors :

$$\tau_{t_0}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

représente la vitesse moyenne du point mobile entre les instant $t_0$ et $t$ et

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \tau_{t_0}(t) \quad \left( = \dot{f}(t_0) \quad \text{en mécanique} \right)$$

représente la vitesse instantanée du point mobile au temps $t_0$.

## I.2 – Propriétés des fonctions dérivables en un point

### I.2.1 – Théorème

***(i)*** Une fonction dérivable en un point est nécessairement continue en ce point.

***(ii)*** La réciproque est fausse.

### Démonstration

B10

### I.2.2 – Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en un point)

Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(\mathrm{A},\mathbb{R})^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$ un point en lequel $f$ et $g$ sont dérivables.

***(i)*** La fonction $\lambda f$ est dérivable en $a$ et on a :

$$\left(\lambda f\right)'(a) = \lambda f'(a)$$

***(ii)*** La fonction $f+g$ est dérivable en $a$ et on a :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

***(iii)*** La fonction $fg$ est dérivable en $a$ et on a :

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

***(iv)*** Si $g(a) \neq 0$ alors $g$ est non nulle au voisinage de $a$, la fonction $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de $a$ et est dérivable en $a$ avec :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

***(v)*** Si $g(a) \neq 0$ alors $g$ est non nulle au voisinage de $a$, la fonction $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de $a$ et est dérivable en $a$ avec :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

### Démonstration de *(iii)*

B11

B12

### I.2.3 – Proposition (Dérivée d'une fonction composée en un point)

Soient $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ dérivable en $a \in \mathrm{A}$ et $g \in \mathscr{F}(\mathrm{B}, \mathbb{R})$ dérivable en $b = f(a) \in \mathrm{B}$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en $a$ et on a :

$$\left(g \circ f\right)'(a) = f'(a) \times g'\left(b\right) = f'(a) \times g'\left(f(a)\right) = f'(a) \times g' \circ f(a)$$

### I.2.4 – Proposition (Dérivation d'une fonction réciproque)

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone réalisant une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et $a \in \mathrm{I}$ un point en lequel :

- $f$ est dérivable ;
- $f'(a) \neq 0$.

Alors $f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a) \in \mathrm{J}$ et on a $\left(\text{en ayant en tête que } a = f^{-1}(b)\right)$ :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

## Démonstration

B13

B13

**Remarque –** Dans le cas où $f$ est dérivable en $a$ avec $f'(a) = 0$, on démontre de même que la valeur absolue du taux d'accroissement de $f^{-1}$ en $b$ tend vers $+\infty$ en $b$. Cela prouve que :

- $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $b$ ;
- la courbe représentative de $f^{-1}$ présente en $b$ une tangente verticale.

## I.3 – Fonction dérivée

### I.3.1 – Définition

On dit que $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ est ***dérivable*** si celle-ci est dérivable en tout point de A. Dans ce cas la ***fonction dérivée*** de $f$ est par définition la fonction :

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

On note $\mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur A à valeurs dans $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}$.

**Remarque –** On note parfois $f' = \mathrm{D}(f) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (notation de Leibniz). Mais attention aux **pitreries** ! Si on utilise cette notation de Leibniz on écrira :

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) \qquad \text{ou} \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

Et sûrement **PAS** :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

qui revient à écrire $f'(x) = f'$ c'est-à-dire confondre une fonction avec sa valeur en un point !

### I.3.2 – Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables)

Soit $(f, g) \in \mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

***(i)*** $f + g \in \mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ et on a :

$$(f+g)' = f' + g'$$

***(ii)*** $\lambda f \in \mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ et on a :

$$(\lambda f) = \lambda f'$$

***(iii)*** $fg \in \mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ et on a :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

***(iv)*** Si $g$ n'est jamais nulle sur A $\big($ç-a-d $\forall x \in \mathrm{A},\ g(x) \neq 0\big)$ alors $\dfrac{1}{g} \in \mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ et on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

***(v)*** Si $g$ n'est jamais nulle sur A $\left(\text{ç-a-d } \forall x \in \mathrm{A},\ g(x) \neq 0\right)$ alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

**Démonstration**

C'est une conséquence directe de la proposition **I.2.2**, si ce n'est que l'on travaille ici sur A tout entier et pas seulement en un point $a \in \mathrm{A}$ particulier.

### I.3.3 – Proposition (Dérivée d'une fonction composée)

Soient $f \in \mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $g \in \mathscr{D}(\mathrm{B}, \mathbb{R})$ . Alors $g \circ f$ est dérivable sur A, c'est-a-dire appartient à $\mathscr{D}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ et on a :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

**Démonstration**

C'est une conséquence directe de la proposition **I.2.3**, si ce n'est que l'on travaille ici sur A tout entier et pas seulement en un point $a \in \mathrm{A}$ particulier.

### I.3.4 – Proposition (Dérivée d'une fonction réciproque sur un intervalle)

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone réalisant une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. On suppose de plus que $f$ est dérivable sur I et que $f'$ n'est jamais nulle sur I (c'est-à-dire $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \neq 0$). Alors $f^{-1} \in \mathscr{D}(\mathrm{J}, \mathrm{I})$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

**Démonstration**

C'est une conséquence directe de la proposition **I.2.4**, si ce n'est que l'on travaille ici sur I et J tout entier et pas seulement en des points $a \in \mathrm{I}$ et $b = f(a) \in \mathrm{J}$ particuliers.

### I.3.5 – Dérivées des fonctions usuelles.

***Formulaire à revoir !!!!***

## I.4 – Dérivées successives

### I.4.1 – Définition (Dérivées successives)

Sous réserve d'existence, les dérivées successives de $f \in \mathscr{F}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ sont définies par :

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(1)} &= f' \\ &\vdots \\ f^{(k+1)} &= \left(f^{(k)}\right)' \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

**Remarque –** On note généralement $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et $f^{(3)} = f'''$.

### I.4.2 – Définition (Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on dit que $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ est de classe $\mathscr{C}^k$ si :

***(i)*** $f$ est $k$ fois dérivable sur A, ç-à-d si $f'$, $f''$,... , $f^{(k)}$ existent sur I ;

***(ii)*** toutes ces dérivées successives $f'$, $f''$,... , $f^{(k)}$ sont ***continues*** sur A.

On note $\mathscr{C}^k(A, B)$ l'ensemble des fonctions de classes $\mathscr{C}^k$ sur A à valeurs dans $B \subset \mathbb{R}$.

### Remarques

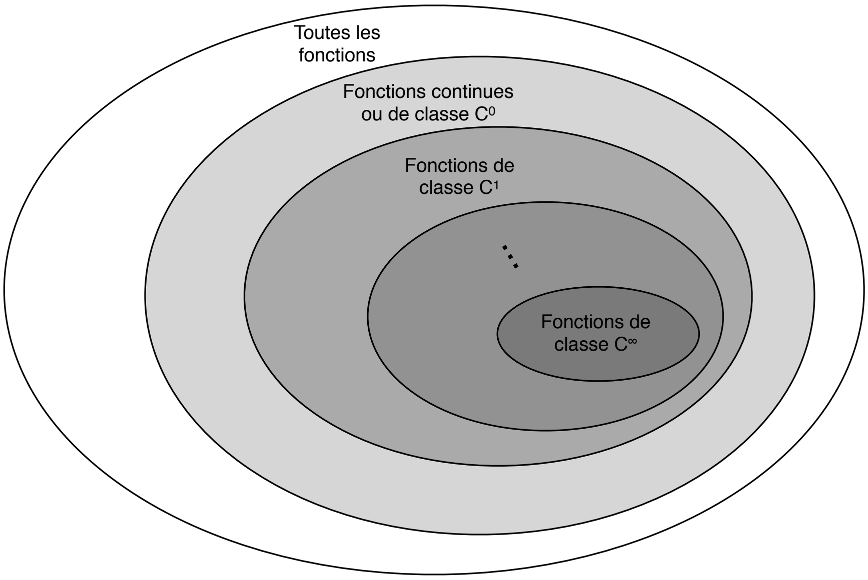
**1 ▶** Les dérivées intermédiaires $f'$, ..., $f^{(k-1)}$ sont automatiquement continues car dérivables. En revanche, rien d'automatique pour la dérivée $k$-ième : elle peut exister sans être continue.

**2 ▶** Pour uniformiser les notations, on dit souvent qu'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^0$.

**3 ▶** Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est une fonction qui est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

**4 ▶** On a donc une classification des fonctions que l'on peut représenter par une suite d'inclusions strictes :

$$\mathscr{C}^\infty(A, B) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^{k+1}(A, B) \subset \mathscr{C}^k(A, B) \cdots \subset \mathscr{C}^1(A, B) \subset \mathscr{C}^0(A, B) \subset \mathscr{F}(A, B)$$




L'ensemble le ***plus petit*** correspond aux fonctions les ***plus rares*** car elles possèdent des propriétés ***plus fortes***.

**5 ▶** La plupart des fonctions usuelles étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, notre intuition pourrait nous pousser à dire que la majorité des fonctions l'est aussi. Mais il n'en est rien. Les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sont bien exceptionnellement rares. Le paradoxe (apparent) est qu'il est relativement difficile d'exhiber des fonctions qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^\infty$. Mais cela ne signifie aucunement qu'il n'y en a peu...

### I.4.3 – Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$)

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $(f, g) \in \left(\mathscr{C}^k(A, \mathbb{R})\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

***(i)*** $f + g \in \mathscr{C}^k(A, \mathbb{R})$ ;

***(ii)*** $\lambda f \in \mathscr{C}^k(A, \mathbb{R})$ ;

***(iii)*** $fg \in \mathscr{C}^k(A, \mathbb{R})$ et on a la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)} g^{(i)}$$

***(iv)*** Si $g$ n'est jamais nulle sur A $\left(\text{ç-a-d } \forall x \in A,\ g(x) \neq 0\right)$ alors $\dfrac{1}{g} \in \mathscr{C}^k(A, \mathbb{R})$.

*(v)* Si $g$ n'est jamais nulle sur A $\left(\text{ç-a-d } \forall x \in \mathrm{A},\ g(x) \neq 0\right)$ alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{A}, \mathbb{R})$

### Démonstration

Tout cela se démontre par récurrence à l'aide de la proposition **I.3.2**, sauf la formule de Leibniz, qui se démontre, elle aussi par récurrence, *mutatis mutandis*, comme la formule du binôme de Newton.

### I.4.4 – Proposition (Composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$)

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{B}, \mathbb{R})$. Alors $g \circ f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{A}, \mathbb{R})$.

*Démonstration officiellement non exigible (très facile par récurrence sur $k$).*

### I.4.5 – Proposition (Réciproque d'une bijection de classe $\mathscr{C}^k$)

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone réalisant une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. On suppose que $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et que $f'$ n'est jamais nulle sur I (c'est-à-dire $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \neq 0$).

Alors $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J c-à-d $f^{-1} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{J}, \mathrm{I})$.

*Démonstration officiellement non exigible (assez facile par récurrence sur $k$).*

## I.5 – Fonctions à valeurs complexes

Pour une fonction à valeurs complexes, la dérivabilité se définit exactement comme pour une fonction à valeurs réelles, c-à-d par l'existence d'une limite (finie) aux taux d'accroissement. On définit de même la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Un des résultats fondamentaux est que $f$ est dérivable si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et on a dans ce cas $f' = \left(\mathrm{Re}(f)\right)' + \mathrm{i}\left(\mathrm{Im}(f)\right)'$. Il en résulte notamment que les règles de calculs restent les mêmes pour la dérivation des fonctions à valeurs complexes.

**Remarque –** Bien noter que l'on parle ici de ***valeurs complexes***. La ***variable***, elle, reste réelle. L'étude des fonctions de la ***variable complexe*** est un sujet fort intéressant mais totalement hors programme en CPGE.

### Exercice L.1

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

**1.** $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

**2.** $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$

### Exercice L.2

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction :

$$h : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$$

**1.** en revenant à la définition ;

**2.** en utilisant le théorème « de la limite de la dérivée ».

### Exercice L.3

Pour quelle(s) valeur(s) de $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ la fonction

$$f:\begin{array}{ccl} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x\in]0,b[ \\ x^2+12 & \text{si } x\in[b,+\infty[ \end{cases}\end{array}$$

est elle de classe $\mathscr{C}^1$ ?

### Exercice L.4

Montrer que la fonction

$$f:\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}\end{array}$$

est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que $f'$ n'est pas continue en 0.

### Exercice L.5

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

***(i)*** Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $\forall x\neq -1,\ f(x)=a+\dfrac{b}{1+x}$.

***(ii)*** En déduire l'expression des dérivées successives de $f$.

### Exercice L.6

Calculer les dérivées successives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

***(i)*** $g(x)=(3x^2+x-5)\mathrm{e}^{-x}$

***(ii)*** $h(x)=\big(\cos(x)\big)\mathrm{e}^{x}$

# II – Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

**NB -** Dans cette partie les fonctions ont toujours un ***intervalle*** comme ensemble de départ.

## II.1 – Théorème de Rolle

### II.1.1 – Définition

Soit $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathrm{I}$.

***(i)*** On dit que $f$ présente un ***maximum local*** en $a$ s'il existe $\delta>0$ tel que $f_{|\mathrm{I}\cap[a-\delta,a+\delta]}$ présente en $a$ un maximum.

***(ii)*** On dit que $f$ présente un ***minimum local*** en $a$ s'il existe $\delta>0$ tel que $f_{|\mathrm{I}\cap[a-\delta,a+\delta]}$ présente en $a$ un minimum.

***(iii)*** On dit que $f$ présente un ***extremum local*** en $a$ si elle a en ce point un minimum ou un maximum local.

#### Remarques

1 ▶ Les extremums au sens usuel sont qualifiés de ***globaux***. Voyons sur un exemple de courbe de fonction la différence entre extremums locaux et globaux.

B14

**2** ▶ Concernant les extremums locaux (par exemple maximums), faisons quelques tracés de fonctions en distinguant les cas où $a$ est au bord de l'intervalle ou pas.

**Cas où $a$ n'est pas une extrémité de $\mathrm{I}$ :**

B15

**Cas où $a$ est une extrémité de $\mathrm{I}$ :**

B16

**Question -** Que remarque-t-on en terme de tangente en un extrémum local ?

B17

### II.1.2 – Proposition (Théorème des extremums intérieurs, Fermat)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$ un élément ***intérieur*** à I, c'est à dire qui n'est ***pas une des bornes*** de I.

***(i)*** Si $f$ est dérivable en $a$ et que $f$ présente en $a$ un extrémum local alors nécessairement $f'(a) = 0$.

***(ii)*** La réciproque est fausse : il se peut que $f$ soit dérivable en $a$ avec $f'(a) = 0$ sans qu'il n'y ait d'extremum local en $a$.

### Démonstration

B18

### II.1.3 – Théorème (de Rolle)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors il existe (au moins) un point $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

### Démonstration

B19

### Remarques

**1** ▶ Interprétation géométrique :

B20

2 ▶ Interprétation cinématique :

B21

3 ▶ Le point $c$ n'a aucune raison d'être unique.

B22

## II.2 – Accroissements finis

### II.2.1 – Théorème (des accroissements finis, TAF)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe (au moins) un point $c \in ]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

#### Remarques

1 ▶ En divisant par $b - a \neq 0$ cela peut s'écrire :

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{[1]} = \underbrace{f'(c)}_{[2]}$$

où :

**[1]** est le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $b$ ;
**[2]** est le nombre dérivé de $f$ au point $c$.

2 ▶ Interprétation géométrique :

B23

3 ▶ Interprétation cinématique :

B24

## Démonstration

B25

### II.2.2 – Théorème (Inégalités des accroissements finis, IAF)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I telle que $|f'|$ soit bornée par un réel $\mathrm{M} \geqslant 0$ sur I.
Alors $f$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{M}|x - y| \qquad \textbf{[L]}$$

### Remarques

1 ▶ Une fonction $f$ vérifiant la propriété **[L]** est dite M-***lipschitzienne*** ou ***lipschitzienne de rapport*** M.

2 ▶ Une fonction est dite ***contractante*** s'il existe un réel $\mathrm{M} \in [0, 1[$ tel que $f$ soit M-*lipschitzienne*. Les fonctions contractantes apparaissent notamment dans un théorème dit « du point fixe » ***absolument fondamental*** (attribué suivant les auteurs à Banach ou à Picard). Il est hors programme en PTSI mais peut tout à fait faire l'objet d'une devoir écrit ou d'une épreuve de concours (les outils utilisés pour le démontrer sont eux complètement au programme).

3 ▶ Interprétation cinématique :

B26

### Démonstration

B27

## II.3 – Applications

### II.3.1 – Théorème (Lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.

***(i)*** $f$ est constante sur I si et seulement si $f'$ est (identiquement) nulle sur I ;

***(ii)*** $f$ est croissante sur I si et seulement si $f'$ reste positive sur I ($f' \geqslant 0$) ;

[ *et résultat analogue pour fonction décroissante et dérivée négative* ]

***(iii)*** si $f' > 0$ sur I alors $f$ est strictement croissante sur I ;

[ *et résultat analogue pour fonction décroissante et dérivée négative* ]

***(iv)*** si $f' > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points en lequel $f'$ est nulle, alors $f$ est quand même strictement croissante.

[ *et résultat analogue pour fonction décroissante et dérivée négative* ]

### Démonstration de *(i)* et *(ii)*

B28

### Remarques

**1 ▶** Il est essentiel que l'ensemble de départ soit un intervalle.

**Exemple 1 -** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

B29

**Exemple 2 -** Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

B30

**2 ▶** Exemple illustrant l'intérêt du point ***(iv)*** :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

B31

### II.3.2 – Théorème (De la limite de la dérivée)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a$ un point de I. On suppose que :

- $f$ est continue sur I ;
- $f$ est dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

Alors :

***(i)*** Si $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

***(ii)*** Dans le cas particulier où $\ell = \pm\infty$ on en déduit que $f$ n'est pas dérivable en $a$ et que la courbe de $f$ présente une (demi) tangente verticale au point $a$.

***(iii)*** Dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ on en déduit que $f$ est dérivable en $a$ et que $f'(a) = \ell$.

#### Démonstration

B32

**Remarque –** Un corollaire, malheureusement pas explicitement au programme est le suivant :

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ et que $f'$ possède une limite finie en $a$, alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I tout entier.

***(i)*** La preuve de ce corollaire est laissée aux lecteurs-étudiants. C'est à vous de bosser !

B33

***(ii)*** Si vous avez besoin d'utiliser ce corollaire il vous faudra le redémontrer ***à chaque fois***. *Oui, la vie est dure.*

**Exemple –** Étudions l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité, les variations, et le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(1 - x^4\right)$$

On précisera également l'éventuelle présence de tangentes ou asymptotes aux points particuliers et on terminera en donnant l'allure du graphe de $f$.

B34

### Exercice L.7 (Théorème de Rolle « à l'infini »)

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

### Exercice L.8 (Une généralisation du théorème des accroissements finis)

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ (avec $a<b$) et dérivables sur $]a,b[$ telles que $g'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$.

***(i)*** En utilisant le théorème des accroissement finis, démontrer que $g(b)-g(a)\neq 0$.

***(ii)*** En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $\varphi$ définie par $\varphi(x)=\Big(f(b)-f(a)\Big)g(x)-\Big(g(b)-g(a)\Big)f(x)$, démontrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

### Exercice L.9 (Règle de l'Hôpital)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0\in\mathrm{I}$. On considère deux fonctions $f$ et $g$ continues sur I, dérivables sur $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$ telles que :

**(1)** $f(x_0)=g(x_0)=0$

**(2)** $\forall x\in\mathrm{I}\setminus\{x_0\}, g'(x)\neq 0$

**(3)** $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell\in\overline{\mathbb{R}}$

Montrer que $g$ est non nulle sur $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$ et que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.

*Ce résultat est à retenir sous la forme suivante : sous certaines hypothèses (à connaître!), pour déterminer la limite de $\frac{f}{g}$ (qui est une forme indéterminée), il suffit de chercher la limite de $\frac{f'}{g'}$.*

### Exercice L.10

À l'aide de la règle de L'Hôpital, déterminer les limites en 0 des fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\qquad g(x)=\frac{\sin(x)-x}{x^3}\qquad h(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}$$

### Exercice L.11 (Un petit problème)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathrm{I}=]-\infty,1[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-\ln(1-x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

On admet que la fonction $x\longmapsto \ln(1-x)$, définie sur $]-\infty,1[$, possède un ***développement limité*** à l'ordre 3 en 0 $\big($en abrégé $\mathrm{DL}_3(0)\big)$ et que celui-ci est de la forme :

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon$ est une fonction définie au voisinage de 0 et ayant une limite nulle en 0.

Le terme « $x^3\varepsilon(x)$ » s'appelle le *reste* du développement limité. Pour un un $\mathrm{DL}_3(0)$ on peut aussi écrire ce reste sous le forme $\mathrm{o}(x^3)$ ce qui signifie que ce terme est négligeable devant $x^3$ en 0. Mais nous éviterons cette notation, au moins dans un premier temps.

On admet également que la fonction $x\longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ possède un $\mathrm{DL}_2(0)$ et que celui-ci est de la forme :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^2\delta(x)$$

où $\delta$ est une fonction définie au voisinage de 0 et ayant une limite nulle en 0.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f$.
2. En déduire que $f$ est continue en 0, dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I} \setminus \{0\}$ on a
$$f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x} - f(x)\right)$$
4. En utilisant le développement limité obtenu à la question **1** montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
5. Étudier le signe de la fonction $\varphi$ définie sur I par
$$\varphi(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$$
6. En déduire les variations de $f$.
7. Donner la tangente à la courbe de $f$ à l'origine ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
8. Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe.
9. Donner enfin l'allure de la courbe.

### II.4 – Fonctions à valeurs complexes

*Comme d'habitude, on étudie rapidement ce que deviennent les définitions et résultats précédents dans le cas d'une fonction à **valeurs** complexes.*

**NB -** Il est évidemment hors de question de parler de monotonie, car nous n'avons pas mis en place de relation d'ordre *raisonnable* sur $\mathbb{C}$.

#### II.4.1 – Théorème (Caractérisation des fonctions constantes)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors $f$ est constante si et seulement si $f'$ est (identiquement) nulle sur I.

#### II.4.2 – Théorème

Le théorème de Rolle est **FAUX** pour les fonctions à valeurs complexes. Il en est de même du théorème des accroissement finis.

#### Démonstration

Pour démontrer qu'un théorème est faux, il suffit de trouver (au moins) un contre exemple.

B35

**Remarque –** Revenons un instant sur l'interprétation cinématique que nous avions évoquée pour le théorème de Rolle.

B36

### II.4.3 – Un petit bilan

Dans le cas de fonctions à valeurs réelles on a :

B37

Et dans le cas de fonctions à valeurs complexes on vient de voir que :

B38

Et pourtant...

### II.4.4 – Théorème (Inégalités des accroissement finis, IAF (cas complexe))

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I telle que $\left|f'\right|$ soit bornée par un réel $\mathrm{M} \geqslant 0$ sur I.
Alors $f$ est M-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \mathrm{M}\left|x - y\right|$$

**Remarque –** Évidemment, dans le cas complexe $\left|\ \right|$ désigne le module et plus la valeur absolue.

*Fin du chapitre*