Chapitre

N

Cours et exercices

Dénombrements

Le but de ce chapitre est de clarifier la notion de cardinal d'un ensemble fini. Nous donnerons ensuite un certain nombre de méthode pour dénombrer un ensemble, c'est à dire pour déterminer son cardinal. Ces méthodes nous seront particulièrement utiles dans les chapitres consacrés aux probabilités.

Sommaire

I – Ensembles finis

I.1 – Cardinal d'un ensemble fini

Intuitivement, un ensemble E est de cardinal 4 si l'on peut numéroter ses éléments par les entiers $1, 2, 3, 4$: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Nous allons formaliser cette notion.

I.1.1 – Définition

On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$. Dans ce cas on dit que E est de *cardinal* n et on note $\mathrm{Card}(E) = n$. Si un ensemble n'est pas fini, on dit qu'il est infini.

Remarques

1 ▶ On peut démontrer que le cardinal d'un ensemble est unique. Autrement dit si E est en bijection avec $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, p]\!]$ alors $n = p$ (c'est un lemme que nous admettons).

2 ▶ Par convention $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

3 ▶ Mettre E en bijection avec $[\![1, n]\!]$ correspond à l'idée intuitive de numérotation.

Exemples

1 ▶ $\{8, 3, 2, 9\}$ est un ensemble fini de cardinal 4.

2 ▶ $\{17, 5, x\}$ est un ensemble fini de cardinal 3 si $x \notin \{5, 17\}$ et de cardinal 2 sinon.

3 ▶ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des ensembles infinis.

I.1.2 – Proposition

Soit E un ensemble fini et F une partie de E. Alors F est un ensemble fini de cardinal $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

Remarque – Pour montrer que deux ensembles finis E et F sont égaux on peut donc :

— soit procéder par double inclusion *i.e.* montrer que $E \subset F$ et $F \subset E$;

— soit montrer que $F \subset E$ et que $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

I.1.3 – Proposition

Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.

(i) Si f est bijective alosr $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

(ii) Si f est injective alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.

(iii) Si f est surjective alors $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.

Exemples

1 ▶ Faire le dessin d'une application injective d'un ensemble à 3 éléments dans un ensemble à 5 éléments.

B1

2 ▶ Faire le dessin d'une application surjective d'un ensemble à 6 éléments dans un ensemble à 4 éléments.

B2

I.1.4 – Proposition

Soit E et F deux ensembles de ***même cardinal*** et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) f est injective ;

(ii) f est surjective ;

(iii) f est bijective.

Remarques

1 ▶ En particulier ce résulat est vrai pour les applications $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ où E est un ensemble fini (en prenant $\mathrm{E} = \mathrm{F}$).

2 ▶ Ceci est faux avec un ensembles infini. Par exemple l'application

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$$

est injective mais non surjective.

I.2 – Opérations sur les ensembles finis

I.2.1 – Proposition

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E.

(i) Si A et B sont disjointes alors $\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}) + \mathrm{Card}(\mathrm{B})$.

(ii) $\mathrm{Card}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}) - \mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

(iii) $\mathrm{Card}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{Card}(\mathrm{E}) - \mathrm{Card}(\mathrm{A})$.

(iv) $\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}) + \mathrm{Card}(\mathrm{B}) - \mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Résultat admis.

I.2.2 – Corollaire

Soit $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ des parties de E deux à deux disjointes (*i.e.* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$). On a alors

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{Card}(\mathrm{A}_2) + \cdots + \mathrm{Card}(\mathrm{A}_n)$$

Remarques

1 ▶ On dit que $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ forment une partition de E si les parties A_i sont deux à deux disjointes et si leur réunion est égale à E. Dans ce cas on a :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{E}) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{Card}(\mathrm{A}_2) + \cdots + \mathrm{Card}(\mathrm{A}_n)$$

2 ▶ Par exemple si E désigne l'ensemble des élèves du lycée Vauvenargues et que l'on considère la partition formée par l'ensemble des classes, le résultat précédent signifie simplement que le nombre d'élèves du lycée est égal à la somme du nombre d'élèves de chaque classe.

✎ Exercice N.1

Considérons 3 parties A, B, C de E. Calculer le cardinal de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ en fonction de Card(A), Card(B) et Card(C).

Solution

B3

Remarques

1 ▶ Cette formule porte le nom de formule du *crible* (de Poincaré).

2 ▶ Elle est clairement hors-programme pour plus de 4 parties. Pour 3 parties, il est bon de la connaître, mais d'avoir également une idée de sa démonstration.

I.2.3 – Proposition

Soit E et F deux ensembles finis. Alors $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.

Exemple – Si $E = \{1, 2, 2\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$ alors les éléments de $E \times F$ sont :

B4

Remarques

1 ▶ On peut ensuite démontrer par récurrence que si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles finis alors :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \cdots \mathrm{Card}(E_n)$$

2 ▶ En particulier $\mathrm{Card}(E^n) = \big(\mathrm{Card}(E)\big)^n$.

II – Dénombrement

N-B Sauf mention contraire n et p désignent dans cette section deux entiers naturels non nuls.

Dénombrer un ensemble c'est déterminer son cardinal. Plusieurs méthodes sont envisageables, nous allons les passer en revue.

II.1 – Notion de p-liste

II.1.1 – Définition

On appelle p-liste (ou p-uplet) d'un ensemble E toute suite de p éléments de E Autrement dit une p-liste de E est de la forme $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $\forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in \mathrm{E}$.

Remarques

1 ▶ L'ensemble des p-listes de E est simplement E^p.

2 ▶ Dans cette notion l'***ordre*** est important et des ***répétitions sont possibles***.

3 ▶ Si un élément a apparait plusieurs fois dans une p-liste $l = (x_1, \ldots, x_p)$, par exemple $a = x_3 = x_7$, on dit que la première ***occurrence*** de a se situe à la 3$^{\text{e}}$ place dans la liste l et que la seconde se situe à la 7$^{\text{e}}$ place.

Exemples

1 ▶ Si $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$. Les 2-listes de E sont :

B5

2 ▶ Si $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$ les 3-listes de E sont :

B6

B6

II.1.2 – Proposition

Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

Démonstration

On a déjà remarqué que l'ensemble des p-listes de E était E^p, d'où le résultats.

Remarque – Autre façon de voir : puisque l'ordre compte on peut construire une p-liste en choisissant successivement (et de manière indépendante) x_1 parmi n possibilités, x_2 parmi n, ..., x_p parmi n. Le nombre de façon de faire ce choix est donc

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$$

Exercice N.2

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On la remet dans le paquet et on retire une seconde carte.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages pour lesquels les deux cartes sont rouges ?

Solution

B7

II.1.3 – Proposition

Soit E de cardinal n et F de cardinal p. Alors il y a n^p applications de F dans E *i.e.* dans $\mathscr{F}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

Démonstration

Si $\mathrm{F} = [\![1,p]\!]$ alors on est en train de compter les applications de $[\![1,p]\!]$ dans E c'est à dire les éléments de $\mathscr{F}([\![1,p]\!],\mathrm{E})$. Cela correspond exactement aux suites de p éléments de E c'est-à-dire les p-listes de E. Il y en a donc n^p.

Sinon il y a une bijection de $\varphi : [\![1,n]\!] \to \mathrm{F}$ et considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}: & \mathscr{F}(\mathrm{F},\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{F}([\![1,n]\!],\mathrm{E} \\ & f & \longmapsto & f\circ\varphi \end{array}$$

Cette application T est bijective et sa réciproque est $g \mapsto g\circ\varphi^{-1}$. On en déduit que $\mathrm{Card}\,\mathscr{F}(\mathrm{F},\mathrm{E}) = n^p$.

II.1.4 – Proposition

Si E est de cardinal n alors $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est de cardinal 2^n.

Démonstration

L'idée est qu'une partie de E est parfaitement déterminée par sa fonction indicatrice. On peut, en effet, démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}: & \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathrm{E},\{0,1\}) \\ & \mathrm{A} & \longmapsto & \mathbb{1}_{\mathrm{A}} \end{array}$$

est bijective. On en déduit le résultat d'après la proposition précédente.

II.2 – Notion de p-liste sans répétition

II.2.1 – Définition

On appelle p-liste sans répétition de E toute p-liste constituée d'éléments distincts de E.

Exemple – Si $\mathrm{E} = \{a,b,c\}$ les 2-listes sans répétition sont :

B8

Remarques

1 ▶ Pour cette notion l'ordre est important et il n'y a pas de répétition.

2 ▶ Il y a quelques années les p-listes sans répétition de E étaient appelés p-arrangements de E. Ce vocabulaire a été supprimé lors des récentes modifications de programmes.

II.2.2 – Proposition

Le nombre de p-listes sans répétition d'un ensemble de cardinal n est $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration intuitive

Réfléchissons à la manière de construire une p-liste sans répétition.

B9

II.2.3 – Proposition

Soit E de cardinal n et F de cardinal p. Le nombre d'application injective de F dans E est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration

Si $F = [\![1, p]\!]$ alors les applications injectives de F dans E sont exactement les p-listes sans répétition de l'ensemble E.

Si F est un ensemble de cardinal p quelconque il faut légèrement adapter cette preuve en composant par une bijection. Nous admettrons ce point.

II.2.4 – Corollaire

Si E est un ensemble de cardinal n, le nombre d'application bijective de E dans E (on appelle ces applications des ***permutations*** de E) vaut $n!$.

Démonstration

B10

II.3 – Combinaisons

II.3.1 – Définition

On appelle p***-combinaison*** de de E toute partie à p éléments de E.

Remarques

1 ▶ On rappelle qu'une ***partie*** de E est tout simplement un ***sous-ensemble*** de E.

2 ▶ Comme une combinaison est un ensemble, cette notion de fait pas intervenir l'ordre et il n'y a pas de répétition.

Exemple – Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Les 2-combinaisons de E sont :

B11

II.3.2 – Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Si $p > n$ alors le nombre de p-combinaison de E est nul. Sinon il y en a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démonstration

Si $p > n$ c'est évident. Sinon on peut par exemple raisonner par récurrence sur n.

Initialisation - Si $n = 1$ *i.e.* $E = \{a\}$ on a $\binom{1}{0} = 1 = \frac{1!}{0!1!}$ et $\binom{1}{1} = 1 = \frac{1!}{1!0!}$.

Hérédité - Soit E de cardinal $n+1$ *i.e.* $E = \{x_1, x_2, ..., x_n, a\}$. Parmis les parties à p éléments de E on distingue :

— celle qui ne contiennent pas a : autrement dit il s'agit des parties à p éléments de $\{x_1, ..., x_n\}$. Il y en a $\binom{n}{p}$.

— celle qui contiennent a : autrement dit il s'agit des parties de la forme $F \cup \{a\}$ où F est une partie à $p-1$ éléments de $\{x_1, ..., x_n\}$. Il y en a donc $\binom{n}{p-1}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p+1}\right] \\
&= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\,\frac{n+1}{p(n-p+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{p!\big((n+1)-p\big)!}
\end{aligned}$$

Remarques

1 ▶ Cas particulier à connaître :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{0} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2 ▶ Pour $n = 0$ *i.e.* si l'ensemble est vide, il est cohérent de poser $\binom{0}{0} = 1$. Il y a en effet une unique partie à 0 éléments dans l'ensemble vide : l'ensemble vide lui même !

II.3.3 – Proposition (Rappels)

(i) Symétrie : $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

(ii) Formule de Pascal : $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ si $1 \leqslant p \leqslant n$.

(iii) Autre formule : $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour n et p non nuls et $p \leqslant n$.

Remarque – On appelle triangle de Pascal le tableau (infini) dont la n^{e} ligne est constituée des $\displaystyle\binom{n}{p}$. Il est d'usage de ne pas écrire les $\binom{n}{p}$ avec $p > n$, qui sont nuls.

$$\begin{array}{c|cccccc}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1 & 1 \\
n=2 & 1 & 2 & 1 \\
n=3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
n=4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
n=5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

II.4 – Retour sur la formule du binôme de Newton

II.4.1 – Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration 1 : par récurrence et manipulation de somme

Déjà vu, à réviser.

Démonstration 2 : par dénombrement

Lorque l'on développe le produit

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)}_{n \text{ fois}}$$

on trouve une somme dont le terme général s'obtient en choisissant a ou b dans chaque paranthèse. Par exemple si l'on choisit a dans les 3 premières et b dans les autres on trouve $a^3 b^{n-3}$. Mais ce même terme $a^3 b^{n-3}$ s'obtient aussi en choisissant a dans les 3 dernières paranthèses (et donc b^{n-3} dans les autres). Combien de fois obtient-on ce terme $a^3 b^{n-3}$? Autant de fois que de façons de choisir les 3 paranthèses où l'on prend a (en prenant b dans les autres). Il y en a donc $\binom{n}{3}$.

Plus généralement on constate que ce produit est une somme de $a^k b^{n-k}$, ce terme apparaissant autant de fois qu'il y a de façons de choisir les k paranthèses où l'on prend a (en prenant b dans les autres). Il y en a donc $\binom{n}{k}$, d'où la formule.

II.4.2 – Corollaire

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Démonstration 1 : par la formule du binôme

Il suffit d'appliquer la formule du binôme avec $a = b = 1$ puis $a = -1$ et $b = 1$.

Démonstration 2 : par dénombrement (pour la première somme)

On dénombre l'ensemble des parties d'un ensemble E à n éléments en les classant suivant leur cardinal :

— les parties à 0 élément sont au nombre de $\binom{n}{0} = 1$ (il n'y a que $\varnothing$) ;

— les parties à 1 élément sont au nombre de $\binom{n}{1} = n$ (les singletons) ;

— les parties à 2 éléments sont au nombre de $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (les paires) ;

$$\vdots$$

— les parties à k éléments sont au nombre de $\binom{n}{k}$;

$$\vdots$$

— les parties à n éléments sont au nombre de $\binom{n}{n} = 1$ (il n'y a que E lui même).

Au total les parties de E sont donc au nombre de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Or on sait que $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ possède 2^n éléments (proposition II.1.4) d'où la formule.

II.5 – Méthodes et exemples

II.5.1 – Situation de référence

Il faut être capable de reconnaître les situations classiques évoquées dans le cours.

a) Listes. Deux critères important : l'ordre compte et il peut y avoir répétition. Situation typique : tirages successifs avec remise (dans une urne, un jeu de cartes, ...).

Exemple - *Quel est le nombre de codes possibles sur un cadenas à* 3 *chiffres ?*

B12

b) Listes sans répétition. Deux critères important : l'ordre compte et il n'y a pas de répétition. Situation typique : tirages successifs **sans** remise (dans une urne, un jeu de cartes, ...).

Exemple - *Sur un cadenas à* 3 *chiffres, combien y a-t-il de codes dont les chiffres sont distincts ?*

B13

c) Combinaison.

Cette fois il n'y a pas d'ordre. Situation typique : tirage simultané (dans une urne, un jeu de cartes, ...).

Exemple - *Toujours sur un cadenas à* 3 *chiffres, combien y a-t-il de codes composés de chiffres distincts rangés dans l'ordre croissant ?*

B14

II.5.2 – Dénombrement « par paquet »

Cette méthode est basée sur le fait que si $A_1,\ldots,A_n$ forment une partition d'un ensemble E alors

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)$$

Exemple - *Toujours sur un cadenas à* 3 *chiffres, combien y a-t-il de codes contenant* 1 *exactement une fois ?*

B15

II.5.3 – Dénombrement par complémentaire

Exemple - *Toujours sur un cadenas à* 3 *chiffres, combien y a-t-il de codes contenant au moins un* 1 *?*

Solution fausse - On sépare l'ensemble B de tels codes en trois ensembles : ceux qui contiennent 1 à la première place (ensemble B_1), à la seconde (B_2) et à la troisième (B_3). Le cardinal de chaque ensemble est $10 \times 10 = 100$. Ainsi il y a $100 + 100 + 100 = 300$ codes contenant 1.

Explication - Pourquoi cette solution est-elle fausse ? Parce que les 3 ensembles B_i ainsi construit ne sont pas disjoints. Autrement dit il y a des codes qui sont comptés plusieurs fois. Par exemple $(1, 1, 3)$ est compté deux fois : une fois dans B_1 et une fois dans B_2.

Solution juste :

B16

II.5.4 – Dénombrement par la formule du crible

Remprenons l'exemple précédent avec

$$\mathrm{B}_i = \text{ensemble des codes contenant 1 à la place n}^{\text{o}}\ i$$

On a bien $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{B}_3$ mais le problème est que ces trois ensembles ne sont pas disjoints. On peut dans ce cas utiliser la formule du crible :

$$\mathrm{Card(B)} = \big(\mathrm{Card(B_1)+Card(B_2)+Card(B_3)}\big) - \big(\mathrm{Card(B_1 \cap B_2)+Card(B_2 \cap B_3)+Card(B_2 \cap B_3)}\big) + \mathrm{Card(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}$$

B17

II.5.5 – Principe des Bergers

On vient de voir précédemment qu'il faut faire attention à ce que chaque objet ne soit compté qu'une fois. Mais si chaque objet est compté exactement k fois alors il suffit de diviser le résultat final par k.

Exemple - Pour compter ses moutons un berger (un peu neuneu) compte le nombre de pattes. Évidemment chaque mouton est compté 4 fois. Il suffit donc de diviser par 4 le nombre de pattes pour obtenir le nombre de moutons.

II.5.6 – Dénombrement par construction progressive (principe multiplicatif)

Pour dénombrer un ensemble E on peut détailler les étapes qui permettent de construire un élément quelconque de E.

Exemple - *On tire* 5 *cartes dans un paquet de* 32. *Combien y a-t-il de tirage contenant exactement* 2 *as ?*

B18

Attention, là encore, de ne pas compter les objets plusieurs fois.

II.5.7 – Dénombrement par bijection

Pour dénombrer un ensemble dont on ne connait pas le cardinal, il suffit de la mettre en bijection avec un ensemble dont le cardinal est connu.

Considérons par exemple l'ensemble

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \ / \ x + y + z = 23\}$$

On a

$$\mathrm{Card}(E) = \text{nombre de façon de répartir 23 billes dans 3 tas numérotés}$$

Imaginons maintenant que les billes soient alignées sur le sol.

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(E) &= \text{nombre de façon de répartir 2 séparations entre les 23 billes ainsi alignées}\\ &= \text{nombre de façon de répartir 2 billes noires entre les 23 billes blanches ainsi alignées}\\ &= \text{nombre de façon de placer 2 billes noires aux } 23+2 \text{ emplacements possibles}\\ &= \binom{25}{2} = \frac{25 \times 24}{2} = 300\end{aligned}$$

Dans cet exemple on a donc mis E en bijection avec l'ensemble des parties à 2 éléments d'un ensemble à 25 éléments (dont la cardinal est connu).

III – Exercices

Exercice N.3

On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

2. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :

a) 5 carreaux ou 5 coeurs ;
b) 2 coeurs et 3 piques ;
c) au moins 1 roi ;
d) au plus 1 roi ;
e) 2 rois et 3 coeurs.

Exercice N.4

On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

1. On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes. De combien de façons peut-on les ranger ?

2. On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes, et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.

a) De combien de façons peut-on les ranger ?
b) De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleur ?
c) Même question mais seules les rouges doivent être groupées.

Exercice N.5

Dans une classe, il y a autant de filles que de garçons. Tous les élèves étudient au moins une langue. Parmi eux : 10 étudient l'espagnol ; 15 étudient l'allemand ; 20 étudient l'anglais ; 7 étudient l'espagnol et l'allemand ; 8 étudient l'allemand et l'anglais ; 9 étudient l'anglais et l'espagnol.

Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice N.6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'ensemble des n-listes de 0 et de 1, ne comprenant jamais deux fois 1 consécutivement et $x_n = \mathrm{Card}(X_n)$. Parmi les listes précédentes on note Y_n l'ensemble de celles qui se terminent par 0 et Z_n l'ensemble de celles qui se terminent par 1. On note également $y_n = \mathrm{Card}(Y_n)$ et $z_n = \mathrm{Card}(Z_n)$.

1. Pour $n \geqslant 2$, trouver une relation entre x_n, y_{n-1} et z_{n-1}.

2. Pour $n \geqslant 3$ en déduire x_n en fonction de x_{n-1} et x_{n-2}.

3. En déduire x_n en fonction de n.

Exercice N.7

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice N.8

Soit n un entier naturel. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^3$ de l'équation $x + y + z = n$.

Exercice N.9

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et A une partie de E qui contient p éléments ($p \leqslant n$).

1. Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant un et un seul élément de A ?

2. Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant au moins un élément de A ?

Exercice N.10 (Le « paradoxe » des anniversaire)

Une assemblée est constituée de n individus ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour simplifier, on suppose qu'une année est constituée exactement de 365 jours (autrement dit qu'il n'y a pas d'année bissextile).

1. Déterminer la probabilité p_n pour que (au moins) deux personnes de l'assemblée aient leur anniversaire le même jour sans pour autant être née la même année).

Il est assez clair que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ est une suite croissante.

2. Déterminer le rang n_0 à partir duquel la probabilité p_n est plus grande que $0,5$ (*i.e.* 50% de chance).

3. Déterminer le rang n_1 à partir duquel la probabilité p_n est plus grande que $0,99$ (*i.e.* 99% de chance).

Fin du chapitre