

# Pratiques calculatoires élémentaires

Le but de ce chapitre est de consolider certaines connaissances du lycée. Aucune difficulté théorique ne sera développée ici et les résultats seront rappelés, le plus souvent, sans démonstration. Beaucoup de notions évoquées ici seront largement développées dans les chapitres ultérieurs. Ce chapitre sera également l'occasion d'introduire un certain nombre de notations propres à l'écriture des mathématiques.

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Calcul algébrique dans les ensembles <math>\mathbb{R}</math> et <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>1</b>
I.1	Ensembles de nombres	1
I.2	Un peu de langage mathématique	5
I.3	Règles de calcul élémentaires	6
I.4	Équations et systèmes d'équations	8
<b>II</b>	<b>Inégalités et inéquations dans <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>11</b>
II.1	Inégalités	11
II.2	Valeur absolue	14

## I - Calcul algébrique dans les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

La présentation est faite ici dans le cadre des nombres complexes et donc s'applique évidemment aux nombres réels. Les propriétés véritablement spécifiques aux nombres complexes feront l'objet d'un chapitre dédié.

### I.1 - Ensembles de nombres

#### I.1.1 – Notion d'ensemble

Rappelons pour commencer que si  $E$  est un *ensemble*, la notation «  $x \in E$  » signifie que  $x$  est un *élément* de l'ensemble  $E$ . Par exemple la notation  $x \in \mathbb{R}$  signifie que  $x$  est un élément de l'ensemble des nombres réels c'est à dire que  $x$  est un nombre réel.

Au contraire, la notation  $x \notin E$  signifie que  $x$  n'est pas un élément de  $E$ . Par exemple la notation  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$  signifie que  $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre entier (voir ci-après).

#### Remarques

- 1 ► Nous ne définirons pas la notion d'ensemble. Il s'agit d'une *notion première* que nous nous contenterons d'utiliser conformément à notre intuition et à certain nombre de règles que nous rencontrerons au fur et à mesure de l'année.
- 2 ► Il y a plusieurs moyens pour décrire un ensemble (dans ce contexte, *décrire un ensemble* signifie être capable de dire quels précisément sont ses éléments).

#### Exemples

- 1 ► On peut décrire un ensemble *en extension* en donnant la liste de ses éléments :

B1

- 2 ► On peut décrire un ensemble *en compréhension* en donnant une propriété qui *caractérise* ses éléments. L'ensemble des réels *dont le carré vaut 4* se note par exemple :

B2

(bien entendu cet ensemble n'est rien d'autre que la *paire*  $\{-2, 2\}$ ).

3 ► On peut décrire un ensemble comme l'ensemble des images par une fonction. Par exemple :

B3

désigne l'ensemble des *carrés parfaits* c'est à dire l'image des entiers naturels par la fonction *élévation au carré*  $x \mapsto x^2$ .

### I.1.2 – Entiers

Les entiers *naturels* sont les entiers positifs ou nuls. L'ensemble de ces nombres est noté  $\mathbb{N}$ . Les entiers de signes quelconques sont appelés entiers *relatifs* et on note  $\mathbb{Z}$  l'ensemble de ces nombres. L'ensemble  $\mathbb{N}$  est donc *inclus* dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$  ce l'on note  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

On note également  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers naturels *non nuls* et  $\mathbb{Z}^*$  l'ensemble des entiers relatifs *non nuls*. Par ailleurs, la notation  $\llbracket n, p \rrbracket$  désignent l'ensemble des entiers qui sont supérieurs ou égaux à  $n$  et inférieurs ou égaux à  $p$ . Par exemple  $\llbracket -2, 5 \rrbracket$  est constitué des entiers  $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

Certains ont étudié au lycée (en spécialité) les propriétés *arithmétiques* des entiers. Nous reverrons certaines de ces notions plus tard dans l'année mais il faut au moins connaître le principe de la *division euclidienne*.

### I.1.3 – Théorème (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ )

Pour tout  $a \in \mathbb{Z}$  et tout  $b \in \mathbb{Z}^*$  il existe deux entiers (relatifs)  $q$  et  $r$  *uniques* vérifiant :

B4

On dit que  $a$  est le *dividende*,  $b$  le *diviseur*,  $q$  le *quotient* et  $r$  le *reste* de la division. Au delà de cette formulation théorique il convient de savoir poser une division *en pratique*. Par exemple :

B5

### I.1.4 – Nombre rationnels

L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres *rationnels* est l'ensemble des fractions d'entiers. Autrement dit :

B6

La notation  $\mathbb{Q}^*$  désigne bien sûr l'ensemble des nombres rationnels non nuls.

Tout rationnel s'écrit de manière *unique* sous la forme  $\frac{a}{b}$ , avec  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a$  et  $b$  n'ayant aucun diviseur commun (autre que 1). On dit alors que la fraction est *irréductible* et c'est toujours sous cette forme qu'il est préférable de donner les résultats rationnels.

Il existe des réels non rationnels, on dit qu'ils sont *irrationnels*. Par exemple  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  et  $e = \exp(1)$  sont des nombres irrationnels.

### I.1.5 – Proposition

Le nombre  $\sqrt{2}$  est irrationnel :  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

#### Démonstration

B7

**Remarque** – Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé le fait que si  $a$  est un nombre entier dont le carré est pair, alors  $a$  est lui même pair. Justifions cela.

#### Démonstration

B8



Il existe, pour certains intervalles de  $\mathbb{R}$ , des notations spécifiques que nous donnons ci-dessous :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

$$\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$$

$$\mathbb{R}_-^* = ]-\infty, 0[ = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$$

Des notations analogues peuvent être utilisées pour  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ .

## I.2 - Un peu de langage mathématique

### I.2.1 – Définition (Quantificateurs)

- (i) Pour indiquer qu'un énoncé (ou propriété) mathématiques est vrai *quel que soit* l'élément  $x$  dans l'ensemble  $E$  on écrit : «  $\forall x \in E$  ». Le symbole  $\forall$  est appelé **quantificateur universel**.
- (ii) Pour indiquer qu'un énoncé (ou propriété) mathématiques est vrai *pour au moins* un élément  $x$  dans l'ensemble  $E$  on écrit : «  $\exists x \in E$  ». Le symbole  $\exists$  est appelé **quantificateur existentiel**.
- (iii) Pour indiquer qu'un énoncé (ou propriété) mathématiques est vrai *pour un unique* élément  $x$  dans l'ensemble  $E$  on écrit : «  $\exists! x \in E$  ».

### I.2.2 – Autres notations

On utilise indifféremment les symboles « | », « / » ou une simple virgule « , » pour signifier « tel que » dans une phrase mathématiques.

#### ⚠ ATTENTION

Le langage mathématique est un langage à part entière et il convient, en principe, de ne pas le mélanger avec le langage naturel (le français pour nous). Normalement, une phrase mathématique s'écrit de manière isolée sur une ligne (mais on peut parfois faire preuve d'un peu de souplesse).

### Exemples

- 1 ► L'énoncé mathématique suivant : «  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$  » signifie « pour tout nombre réel  $x$ , il existe un entier naturel  $n$  tel que  $n$  soit strictement plus grand que  $x$  ». Cet énoncé est-il vrai ou faux?

B14

- 2 ► Écrivons en langage mathématiques le fait qu'il n'existe aucun réel dont le carré soit égal à  $-1$ . Attention le symbole  $\nexists$  n'est pas véritablement considéré comme un quantificateur et on fera en sorte de ne pas l'utiliser.

B15

#### ✎ Exercice A.1

Traduire en langage naturel les énoncés mathématiques suivant puis préciser s'ils sont vrais ou faux :

(i)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}_+, x = y^2$

(ii)  $\exists x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 1 = x^2 + x$

#### ✎ Exercice A.2

Traduire en langage mathématiques les énoncés suivant (vrais ou faux est bien moins évident pour (ii)) :

(i) La suite de terme général  $u_n = n^2$  est bornée.

(ii) Tout entier naturel peut s'écrire comme la somme de quatre carrés d'entiers naturels.



- Utiliser les formules classiques avec discriminant dans le cas spécifique d'une expression polynomiale de degré 2.
- Utiliser un changement de variable (notamment pour les équations *bicarrés*).

### I.3.4 – Proposition (Identités remarquables au carré et au cube)

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  on a :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 & (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3 \quad (\star) \\ & & (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

#### Démonstration de l'identité $(\star)$

B20

**Remarque** – Attention,  $a^2 + b^2$  ne peut pas se factoriser sur  $\mathbb{R}$ . En revanche cette expression se factorise dans  $\mathbb{C}$  sous la forme suivante :

B21

(voir le chapitre consacré aux nombres complexes).

### I.3.5 – Formule du binôme

On vient de voir comment développer  $(a+b)^2$  et  $(a+b)^3$ . Plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} a^{n-1} b + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{=n} a b^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} b^n$$

C'est-à-dire :

B22

En échangeant le rôle de  $a$  et de  $b$  (sachant que  $a+b = b+a$ ) on a aussi :

B23

C'est ce que l'on appelle la formule du binôme de Newton, les coefficients  $\binom{n}{k}$  ( $k$  parmi  $n$ ) pouvant se calculer à l'aide du triangle de Pascal :

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1

Ce triangle se remplit à l'aide de la formule de Pascal que l'on peut schématiser par :

• + •  
||  
•

Nous démontrerons cette formule du binôme de Newton dans le chapitre B.

### I.3.6 – Racine carrée

Tout nombre réel *positif* peut s'écrire comme le carré d'un unique nombre réel positif.

En langage mathématique cela peut s'écrire :

B24

(rappelons que le « ! » précise l'unicité).

#### Remarques

- 1 ► Cet unique nombre positif  $y$  est appelé *racine carrée* de  $x$  et on note  $y = \sqrt{x}$ .
- 2 ► Évidemment on a toujours  $(\sqrt{x})^2 = x$  (mais cela impose à  $x$  d'être positif!).

#### ⚠ ATTENTION

En revanche, si  $x$  est un réel de signe *quelconque* on a :  $\sqrt{x^2} = |x|$  (valeur absolue de  $x$ ).

**Remarque** – Un carré étant toujours positif, il est clair qu'un nombre strictement négatif ne peut pas être un carré. Autrement dit un nombre strictement négatif ne possède pas de racine carrée. En langage mathématique cela s'écrit :

B25

Littéralement cela signifie : « un réel strictement négatif  $x$  n'est le carré d'aucun réel  $y$  ».

## I.4 - Équations et systèmes d'équations

### I.4.1 – Équations du second degré

On considère une équation du type  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$ , l'inconnue  $x$  étant réelle. Pour résoudre l'idée est de factoriser cette expression à l'aide d'une identité remarquable :

B26

Si l'on pose  $\Delta = b^2 - 4ac$  (appelé discriminant de l'équation) on a donc :

B27





 Exercice A.3

Factoriser dans  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes :

(i)  $A(x) = x^4 + 3x^2 + 2$

(iii)  $C(x) = x^3 + x^2 + x - 3$

(ii)  $B(x) = x^4 + x^2 + 1$

(iv)  $D(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$

 Méthode A.2

Avant de résoudre une équation, on commence **TOUJOURS** par étudier l'ensemble de résolution c'est-à-dire le plus grand ensemble sur lequel les différentes expressions de l'équation sont bien définies.

En fin de résolution, il apparaît parfois des « fausses solutions » qui n'appartiennent pas à l'ensemble de résolution.

 Exercice A.4

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

(i)  $\frac{x\sqrt{x-2}}{x-3} = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

(iii)  $\frac{6x-1}{4x-1} = \frac{3x+1}{2x-5}$

(ii)  $\sqrt{|x^2-1|} = x-5$

(iv)  $x = |2x+5|$

## I.4.2 – Équations contenant des racines carrées

Le principe général est qu'il faut **absolument** s'occuper des questions de **signes**.

 Méthode A.3

Pour résoudre une équation comportant une (ou plusieurs) racine carrée :

- on commence par s'occuper des questions d'ensemble de résolution ;
- on peut précéder par élévation au carré, *ce qui peut introduire des « fausses solutions »* puis effectuer une vérification ;
- on peut procéder par équivalences successives à condition de s'occuper à chaque étape des questions de signes ;
- on peut isoler une racine d'un côté de l'équation afin de l'élever au carré (en faisant toujours attention aux signes).

 Exercice A.5

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$ .

 Exercice A.6

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $x+1 = \sqrt{-x^2+5}$ .

## I.4.3 – Systèmes d'équations linéaires

Pour résoudre un système linéaire de taille supérieure ou égale à 3, on utilise en général la méthode consistant à combiner les équations pour éliminer successivement des inconnues, le but étant d'obtenir un système *triangulaire* (ou plus généralement *échelonné*). On termine le calcul en résolvant en partant de la dernière équation et en remontant jusqu'à la première.

 Méthode A.4

La méthode systématique (avec tous les détails) sera étudiée dans un chapitre ultérieur. Pour le moment, nous nous contentons de décrire cette méthode en résolvant l'exercice suivant.

 Exercice A.7

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -2x + 2y + z = -5 \\ 3x + 2y + 3z = 20 \end{cases}$$

**Solution**

À écrire dans votre document annexe (classeur ou cahier) relatif au chapitre A.

La méthode présentée dans l'exercice précédent est appelée méthode du **pivot de Gauss** et permet de transformer tout système linéaire en un système triangulaire *équivalent*. Le terme *équivalent* signifie ici que le système obtenu admet exactement les mêmes solutions que le système initial.

Résumons les opérations valides qui permettent d'obtenir un système équivalent au système précédent :

- échange de la  $i^e$  et de la  $j^e$  ligne :  $L_i \leftrightarrow L_j$ , pour  $i \neq j$  ;
- multiplication de la  $i^e$  ligne par un réel non nul :  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ , pour  $\alpha \neq 0$  ;
- ajout d'un multiple de la  $j^e$  ligne à la  $i^e$  ligne :  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ , pour  $i \neq j$  mais  $\lambda$  quelconque.

**Exercice A.8**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , obligatoirement par la *méthode du pivot de Gauss*, le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x + 3y + z = 2 \\ x + y + 5z = 1 \end{cases}$$

**II - Inégalités et inéquations dans  $\mathbb{R}$**

**II.1 - Inégalités**

**II.1.1 – Généralités**

On rappelle que la notation  $a \leq b$  signifie que le nombre réel  $a$  est inférieur ou égal au réel  $b$ . La notation  $a < b$  signifie que le nombre réel  $a$  est strictement inférieur au réel  $b$ . On dispose également des relations « supérieur ou égal » et « strictement supérieur ».

Cette **relation d'ordre**  $\leq$  possède les propriétés suivantes.

**a) Réflexivité**

Pour tous réels  $a$  on a  $a \leq a$ . Par exemple l'énoncé mathématique  $2 \leq 2$  est exact. Le nombre 2 est en effet *inférieur ou égal* à 2 puisque qu'il est *égal* à 2.

**b) Transitivité**

Pour tous réels  $a, b, c$ , si  $a \leq b$  et  $b \leq c$  alors  $a \leq c$

**c) Antisymétrie**

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , si  $a \leq b$  et  $b \leq a$  alors  $a = b$ .

**Remarques**

1 ► En langage mathématique, la réflexivité s'écrit :

B35																			
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2 ► Afin d'écrire les autres propriétés en langage mathématique, il faut introduire la notion d'*implication logique*. Si P et Q sont deux énoncés mathématiques (le terme exact est *propositions*) alors la notation  $P \Rightarrow Q$ , qui se lit « P implique Q » signifie que Q est une conséquence logique de P. Par exemple la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 6 \mid n \Rightarrow 2 \mid n$$

signifie que si un entier naturel  $n$  est divisible par 6, alors il est divisible par 2. Cette proposition est bien entendu vraie.

3 ► La transitivité de la relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$  peut donc s'écrire

B36																			
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

et l'antisymétrie :

B37																			
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

### II.1.2 – Compatibilité avec l'addition

Si  $a \leq b$  alors pour tout nombre réel  $c$  on a  $a + c \leq b + c$ , autrement dit

B38

On en déduit que l'on peut ajouter deux inégalités : si  $a \leq b$  et  $x \leq y$  alors  $a + x \leq b + y$ . En langage mathématique cela s'écrit :

B39

En revanche **on ne peut pas soustraire deux inégalités**. On a par exemple :

B40

Plus généralement si l'on dispose de nombre réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $b_1, b_2, \dots, b_n$  tels que :

B41

alors on a :

B42

### II.1.3 – Compatibilité avec la multiplication

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels vérifiant  $a \leq b$ . Si  $c \geq 0$  alors  $ac \leq bc$  et si  $c \leq 0$  alors  $ac \geq bc$ . En langage mathématique cela s'écrit :

B43

En général **on ne peut pas multiplier deux inégalités!** On a par exemple :

B44

Mais cela est possible si les nombres sous **tous positifs** :

B45

Plus généralement si l'on dispose de nombres réels **tous positifs**  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$  tels que :

B46

alors on a :

B47

### II.1.4 – Passage à l'inverse

Si  $a$  et  $b$  sont deux nombre réels **non nuls** et de **même signe** tels que  $a \leq b$ , alors  $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ .





B54(suite)

**(ii) Seconde inégalité triangulaire**

B55

**Remarque** – Plus généralement, on peut démontrer par récurrence que si  $a_1, \dots, a_n$  sont des nombres réels alors :

B56

**II.2.4 – Interprétation géométrique**

Si l'on représente  $\mathbb{R}$  comme une droite (ce qui est très fréquent) la distance entre deux réels  $a$  et  $b$  vaut  $|a - b|$ .

Cette remarque permet par exemple de retenir facilement que les nombres réels  $x$  vérifiant  $|x - a| \leq \varepsilon$  sont exactement les réels de l'intervalle  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ . Cela est fondamental en analyse pour bien comprendre les notions de limite, de continuité et de dérivabilité.

B57

B57(suite)

**💡 Méthode A.8**

Pour résoudre des équations ou des inéquations dans laquelle figurent des valeurs absolues on peut séparer l'étude en plusieurs cas, en fonction du signe des expressions figurant dans les valeurs absolues.

**✎ Exercice A.13**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $x^2 + |x| \geq 3x + 1$ .

**Indication** – Pour supprimer la valeur absolue on séparera les cas  $x \geq 0$  et  $x \leq 0$ , autrement dit on résoudra l'inéquation séparément sur  $\mathbb{R}_+$  et sur  $\mathbb{R}_-$ .

**✎ Exercice A.14**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

(i)  $|4x + 1| \geq 2$

(ii)  $|3x - 2| \leq x + 1$

➤ Fin du chapitre ◀