Techniques de calcul de primitives et d'intégrales

Par M. Olivier BREBANT

Ce chapitre est axé sur les techniques de calcul en approfondissant ce qui a été vu en TS. On introduit ici deux outils incontournables : l'intégration par partie et le changement de variable. La construction rigoureuse de la notion d'intégrale ne se fera qu'au second semestre.
I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point, C une constante réelle.

1 Cacluls de primitives

1.1 Génrélaités

Définition

Soit f une fonction définie sur I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction dérivable sur I dont la dérivée est égale à f.
On note usuellement $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$ *une* expression de cette primitive.

Propriété

Soit f une fonction définie sur I admettant des primitives. Alors toutes les primitives de f diffèrent d'une constante.

Exemple

Q 1 Déterminer une primitive de $f : x \mapsto (3x+2)^2$.

Q 2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et F une de ses primitives. Prenons a et b deux réels avec $a \neq 0$. Déterminer une primitive de $g : x \mapsto f(ax+b)$

Remarques : En principe on retrouve les primitives par « lecture inversée » du tableau de dérivation. C'est en pratiquant souvent que l'on devient à l'aise.

Exemple

- Déterminer une primitive de $f : x \mapsto 3x^4 - \dfrac{2}{1+x^2}$. *(On utilise ici : $(\lambda u + \mu v)'$, $(x^n)'$ et* $\arctan(x)'$*)*
- Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ pour $x > 1$. *(Penser à la décomposition en éléments simples...)*

Remarques : On a ici utilisé $(x^n)'$ pour $n \in \mathbb{Z}$, mais on rappelle que l'on a ajouté dans le chapitre "fonctions usuelles" une formule de dérivation pour $(x^\alpha)'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$...

Exemple

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+2}}$. *(On utilise ici : $(x^\alpha)'$ et $(u \circ v)'$)*

1.2 Un petit tour dans les nombres complexes

En réalité tout ce chapitre s'applique pour des fonctions à valeurs complexes, étant précisé les résultats suivants :

Propriété

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- On dit que f est dérivable sur I si, et seulement si, ses fonctions partie réelle et partie imaginaire sont dérivables ; la fonction dérivée de f est la fonction de I dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f' = (\mathrm{Re}\ f)' + i(\mathrm{Im}\ f)$$

- Si f est continue sur I alors elle admet des primitives et on a :

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{Re}\ f(x)\mathrm{d}x + i \int \mathrm{Im}\ f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple (classique !)

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer une primitive de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\cos(x)$ par deux méthodes.

1.3 Primitive et composition

Dans le chapitre précédent sur les fonctions usuelles on a ajouté au tableau de dérivation la formule $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$. Il faut apprendre à la reconnaître pour obtenir des primitives.

Exemple

- Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{6x}{x^2+1}$.
- Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{6x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- Déterminer une primitive de $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Plus généralement on peut énoncer :

Propriété

Soit $u : I \to J$ une fonction dérivable et φ une fonction dérivable sur J. Alors la fonction $x \mapsto u'(x)\varphi'(u(x))$ admet comme primitive sur I la fonction $x \mapsto \varphi(u(x))$.

Exemple

Donner des primitives de $u'(x)u(x)^n$ et de $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

1.4 Un cas important

Pour $a \neq 0$, il faut savoir calculer les primitives des fonctions du type :

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Méthode :
On commence par chercher les racines du polynome $P = aX^2 + bX + c$, et on procède ainsi :

- Si P a deux racines α et β, on a $f(x)$ de la forme $\dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ et on décompose en éléments simples...
- Si P a une unique racines, on a $f(x)$ de la forme $\dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$ que l'on sait primitiver par la formule $\dfrac{u'}{u^2}$...
- Si P n'a pas de racine, on a $f(x)$ de la forme $\dfrac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$ que l'on primitive à l'aide d'un arctangente...

Exemple

Déterminer les primitives de :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 4}$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

2 Primitives et intégrales

2.1 Fonction "de la borne supérieure"

Théorème

Soit f une fonction continue sur I est $a \in I$ alors la fonction :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur I et a pour dérivée f.
F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Conséquence :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

2.2 Intégration par parties

Rappel : Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est une fonction dérivable dont la dérivée est continue.

Théorème

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. On a :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Preuve : on écrit que $[uv]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (u'v + uv')(x)\mathrm{d}x \ldots$

Exemple

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\mathrm{d}x$
2. Pour tout $x > 0$ calculer $J = \displaystyle\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$ et donner une primitive de ln.
3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction arctan.

2.3 Changement de variable

à venir…

3 Liste de primitives à connaitre

à venir…