

Primitives, intégrales et équations différentielles

Le but de ce chapitre est de consolider et enrichir les compétences acquises en terminale concernant le calcul de primitives et d'intégrales puis d'apprendre à résoudre un certain nombre d'équations différentielles (utiles par exemple en sciences physiques). Le point de vue est volontairement pratique et les questions théoriques seront étudiées plus tard dans l'année.

Dans ce chapitre \mathbb{K} désigne l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels ou l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Sommaire

I	Primitives et intégrales sur un segment	1
I.1	Primitives	1
I.2	Approche intuitive de la notion d'intégrale sur un segment	3
I.3	Lien entre primitives et intégrales	4
II	Méthodes de calcul	5
II.1	Intégration directe	5
II.2	Intégration par parties	8
II.3	Changement de variable	10
II.4	Exercices additionnels	12
III	Équations différentielles linéaires	12
III.1	Équations différentielles linéaires d'ordre 1	12
III.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	17
III.3	Exercices additionnels	22

I – Primitives et intégrales sur un segment

I.1 – Primitives

I.1.1 – Définition (Primitive)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que F est **une** primitive de f sur I si F est dérivable et $F' = f$.

Exemples

1 ► La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur \mathbb{R} .

2 ► La fonction \ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Remarques

1 ► Il n'y a **jamais** unicité car si F est une primitive de f alors pour tout réel λ , il en est de même de la fonction $F + \lambda$.

2 ► On utilisera le verbe **primitiver** (néologisme) pour désigner la recherche d'une primitive.

3 ► On pourra utiliser la notation $\int f(x) dx$ qui désigne en toute rigueur l'**ensemble** des primitives de f ou par abus de notation **l'une d'entre elles**.

3 ► Déterminons une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f donnée par : $f(x) = \frac{\cos(x)}{2 \sin(x) - 5}$

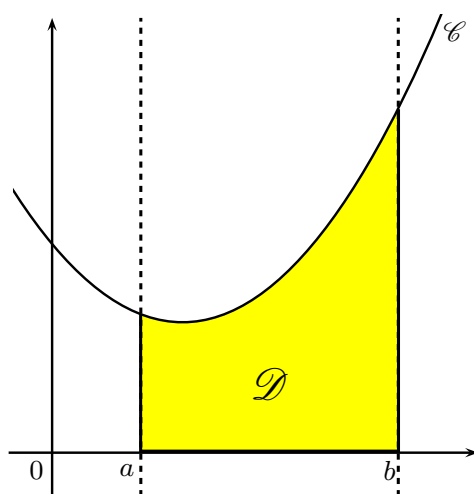


I.2 – Approche intuitive de la notion d'intégrale sur un segment

Il n'est pas facile de définir rigoureusement la notion d'*intégrale* d'une fonction sur un segment. Une idée intuitive consiste à se référer à la notion d'*aire*. Cela ne fait que déplacer le problème puisque la notion d'aire n'a jamais été définie proprement dans l'enseignement secondaire. Nous nous contenterons donc pour l'instant d'idées intuitives.

Si f est une fonction continue et *positive* définie sur un intervalle $[a, b]$ alors intuitivement l'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'aire du domaine \mathcal{D} délimité par la courbe de f , l'axe horizontal et les deux droites verticales d'abscisses a et b . Elle est notée :

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

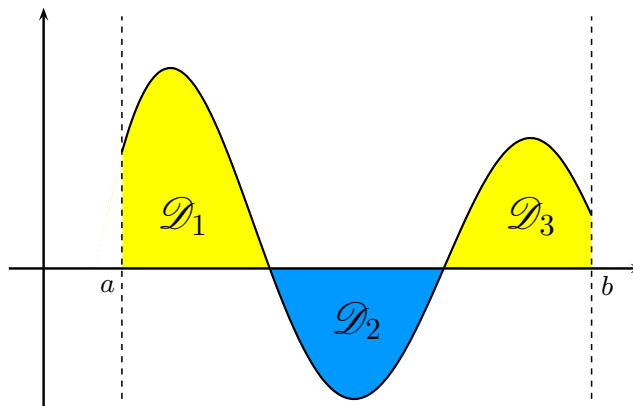


De même, si f est une fonction continue et négative sur $[a, b]$ alors son intégrale vaut

$$\int_a^b f(x) dx = -\text{aire}(\mathcal{D}),$$

le domaine \mathcal{D} étant défini comme précédemment.

Si f est une fonction de signe quelconque sur $[a, b]$ alors son intégrale est la somme algébrique des aires des domaines sur lesquels f garde un signe constant.



Sur la figure précédente on a par exemple :

$$\int_a^b f = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) + \text{aire}(\mathcal{D}_3)$$

Rappelons que tout cela est seulement intuitif puisque nous n'avons pas défini rigoureusement la notion d'aire. Mais rassurez-vous, une construction rigoureuse de l'intégrale sera abordée plus tard dans l'année.

I.3 – Lien entre primitives et intégrales

I.3.1 – Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et $a \in I$.

Alors la fonction :

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule au point a .

Remarques

1 ► Sous les hypothèses précédentes on a donc :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

2 ► On peut en déduire le calcul de la dérivée d'une fonction de la forme :

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$$

où f est continue sur I et α et β deux fonctions dérivables à valeurs dans I .

Pour cela on utilise la même notation F que dans l'énoncé précédent, en introduisant un point quelconque $a \in I$:

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\beta(x)} f(t) dt = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$$

On en déduit (par dérivation composée) :

$$g'(x) = \beta'(x) \cdot F'(\beta(x)) - \alpha'(x) \cdot F'(\alpha(x)) = \beta'(x) \cdot f(\beta(x)) - \alpha'(x) \cdot f(\alpha(x))$$

I.3.2 – Corollaire (Existence de primitive pour une fonction continue)

Toute fonction continue sur un intervalle possède une (des) primitives.

Remarque – Il existe des fonctions sans primitive. Pour trouver un exemple, le théorème précédent nous dit qu'il faut chercher parmi les fonctions non continues. Mais cela est une autre histoire...

B4

2 ► Calculons l'intégrale suivante :

$$J = \int_1^3 \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$$

B5

Exercice E.1

Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

II.2 – Intégration par parties

II.2.1 – Définition (Fonction de classe \mathcal{C}^1)

On dit qu'une fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I si :

- f est dérivable sur I ;
- f' est continue sur I .

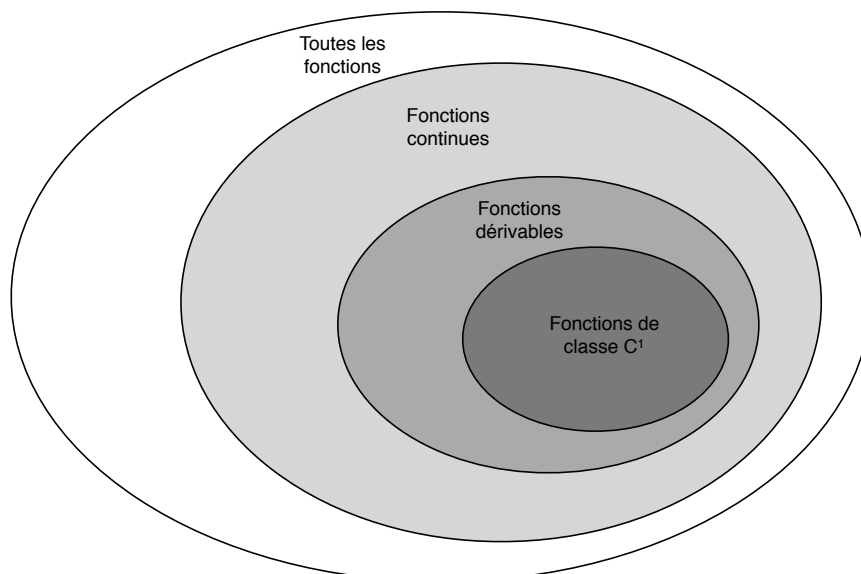
L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I est noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Remarques

- ▶ Attention de ne pas tout mélanger! Si f est une fonction dérivable alors elle est nécessairement continue. En revanche, sa dérivée f' n'est pas automatiquement continue.
- ▶ Des exemples de fonctions dérivables mais pas de classe \mathcal{C}^1 seront étudiés dans la chapitre consacré spécifiquement à la dérivation.
- ▶ En pratique, pour justifier qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^1 on se contente de dire que c'est une composée de fonctions usuelles de classe \mathcal{C}^1 .
- ▶ Ainsi, on a une suite d'inclusions strictes :

$$\underbrace{\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})}_{\text{fonctions } \mathcal{C}^1} \subset \underbrace{\mathcal{D}(I, \mathbb{K})}_{\text{fonctions dérivables}} \subset \underbrace{\mathcal{C}(I, \mathbb{K})}_{\text{fonctions continues}} \subset \underbrace{\mathcal{F}(I, \mathbb{K})}_{\text{fonctions}}$$

Inclusions que l'on peut schématiquement représenter ainsi :



L'ensemble le **plus petit** correspond aux fonctions les **plus rares** car elles possèdent des propriétés **plus fortes**.

II.2.2 – Un premier pas

Considérons deux fonctions u et v de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I .

On sait que $(uv)' = u'v + uv'$ et donc que $uv' = (uv)' - u'v$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, intégrons cette égalité entre a et b :

$$\begin{aligned} \int_a^b uv' &= \int_a^b ((uv)' - u'v) \\ &= \int_a^b (uv)' - \int_a^b u'v \end{aligned}$$

La première intégrale se calcule par intégration directe car $(uv)'$, qui est une fonction continue, a bien sûr pour primitive uv . On a donc :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

On a donc le théorème suivant.

II.2.3 – Théorème (intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle et $(a, b) \in \mathbb{I}^2$. Alors :

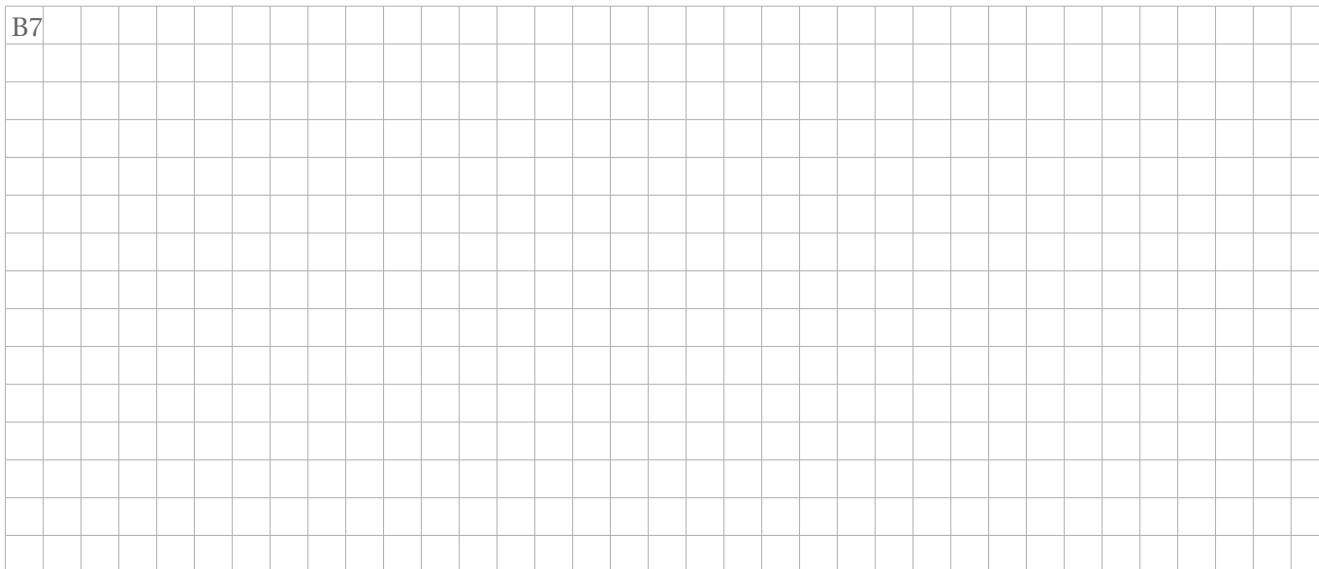
$$\int_a^b uv' = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Exemples

1 ► On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^\pi x \sin(x) dx$$

B7



2 ► Le principe d'intégration par parties peut aussi servir à **calculer une primitive**.

Cherchons par exemple une primitive de \ln sur \mathbb{R}_+^* .

B8



Exercice E.3

À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(x) \, dx$$

Exercice E.4

À l'aide d'une intégration par partie calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t \sin(t)}{\cos^3(t)} \, dt$$

II.3 – Changement de variable**II.3.1 – Théorème (changement de variable)**

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$. Pour tout $(a, b) \in J^2$ on a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du$$

Démonstration

Comme f est continue sur I , elle possède une primitive F . On a alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt = \left[F(t) \right]_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

Sous la seconde intégrale, la fonction est exactement la dérivée de $F \circ \varphi$. En effet

$$(F \circ \varphi)' = \varphi' \cdot F' \circ \varphi = \varphi' \cdot f \circ \varphi$$

On a donc :

$$\int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du = \int_a^b (F \circ \varphi)'(u) \, du = \left[F \circ \varphi(u) \right]_{u=a}^{u=b} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

Remarques

- 1 ► En pratique on procède à un tel changement de variable en écrivant le lien entre l'ancienne et la nouvelle variable et en dérivant :

$$t = \varphi(u) \quad \frac{dt}{du} = \varphi'(u)$$

ce que l'on peut écrire (même si cela n'a pas vraiment de sens mathématique) : $dt = \varphi'(u) \, du$.

- 2 ► Il y a trois choses à modifier lors d'un changement de variables : la fonction elle-même, l'élément différentiel (dt qui devient $\varphi'(u) \, du$) et bien sûr les bornes (en faisant attention à l'ordre).

Exemples

- 1 ► On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$$

B9

2 ► On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

B10

Exercice E.5

Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{\text{Arcsin}(x)}{1-x^2}} dx$$

en faisant le changement de variable $y = \text{Arcsin}(x)$.

Exercice E.6

À l'aide d'un changement de variable calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) + 4\sin(t) + 5} dt$$

II.4 – Exercices additionnels**Exercice E.7**

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3(x)}{2 + \cos(x)} dx$$

Indication – On pourra faire un changement de variable pour se ramener à une fraction rationnelle (quotient de polynômes) puis effectuer une division euclidienne.

Exercice E.8

Étant donné deux nombres réels $a < b$, calculer l'intégrale :

$$I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$$

Indication – Mettre le polynôme figurant dans la racine sous forme canonique, puis effectuer quelques changements de variables judicieux.

III – Équations différentielles linéaires**III.1 – Équations différentielles linéaires d'ordre 1****III.1.1 – Problématique**

Une **équation différentielle d'ordre 1** est une relation liant une fonction (inconnue) et sa dérivée. Précisément, il sera question dans ce paragraphe d'une équation différentielle de la forme :

$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Résoudre l'équation (E) signifie trouver toutes les fonctions y de classe \mathcal{C}^1 sur I vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Remarque – Une fois n'est pas coutume on fait l'économie du quantificateur universel \forall dans l'écriture de l'équation (E). Mais il faut bien avoir en tête que celui-ci est sous-entendu.

À l'équation (E) est associée l'équation **homogène** (c'est à dire sans second membre) :

$$(E_0) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

III.1.2 – Théorème (solutions de l'équation homogène)

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} y_H : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)} \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I .

Démonstration

B11

Exemple – Cherchons les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle suivante : $y'(t) + ty(t) = 0$.

B12

Remarques

- 1 ► Pour alléger les notations, il est de tradition de ne pas faire figurer la variable de la fonction inconnue. L'équation précédente peut donc être notée : $y' + ty = 0$.
Attention, dans ce cas, de bien identifier qui est la variable et qui est la fonction inconnue!
- 2 ► La résolution d'une telle équation consiste donc à trouver une primitive de la fonction a . C'est la raison pour laquelle on dit souvent « intégrer » une équation différentielle au lieu de « résoudre » une équation différentielle.

III.1.3 – Théorème

Si y_P est une solution déjà connue de l'équation (E) (on parle d'une **solution particulière**) alors les solutions de l'équation complète (E) sont les fonctions de la forme $y_G = y_P + y_H$ où y_H est une solution (quelconque) de l'équation homogène (E_0).

Démonstration

B13

Remarques

- 1 ► Ce résultat s'interprète de la manière suivante : la solution **générale** de l'équation (E) s'obtient en ajoutant **une** solution **particulière** de (E) et la solution **générale** de (E_0) : $y_G = y_P + y_H$.
- 2 ► Pour expliciter les solutions de E, il est donc nécessaire de trouver **au moins** une solution particulière. Une telle solution particulière peut-être :
 - soit évidente (une fonction constante par exemple) ;
 - soit trouvée par une méthode spécifique donnée dans un énoncé (par exemple si l'on demande de chercher les solutions polynomiales d'un degré particulier).
 - soit obtenue par la **méthode de variation de la constante** décrite ci-dessous.

💡 Méthode E.1 (Méthode de variation de la constante)

Cette méthode consiste à chercher une solution particulière y_P sous la forme :

$$\begin{aligned} y_P : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto \lambda(t)e^{-A(t)} \end{aligned}$$

Remarques

- 1 ► Par rapport à la solution générale de l'équation homogène, la **constante** λ est devenu une **fonction** (ce qui explique le vocabulaire volontairement contradictoire).

Exercice E.9

Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{cases} y' \cos(t) + y \sin(t) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice E.10

Résoudre le problème de Cauchy suivant sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} y' - (t+1)(y+1) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice E.11

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = \sin(2t)e^t \quad (E)$$

Exercice E.12

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$(1+t^2)y' - ty = \sqrt{1+t^2} \quad (E)$$

III.2 – Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants**III.2.1 – Problématique**

Une **équation différentielle d'ordre 2** est une relation liant une fonction (inconnue) et ses deux premières dérivées. Précisément, il sera question dans ce paragraphe d'une équation différentielle de la forme :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = d(t)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et d est une fonction continue d'un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Résoudre l'équation (E) signifie trouver toutes les fonctions y de classe \mathcal{C}^2 sur I vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

À l'équation (E) est associée **l'équation homogène** (c'est à dire sans second membre) :

$$(E_0) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

Remarque – Attention, avec les notations (abusives mais pratiques) utilisées ici la variable t n'apparaît même pas dans (E_0) . Il faut donc bien avoir en tête que y est une fonction inconnue de la variable t .

III.2.2 – Théorème (Solution de l'équation homogène)

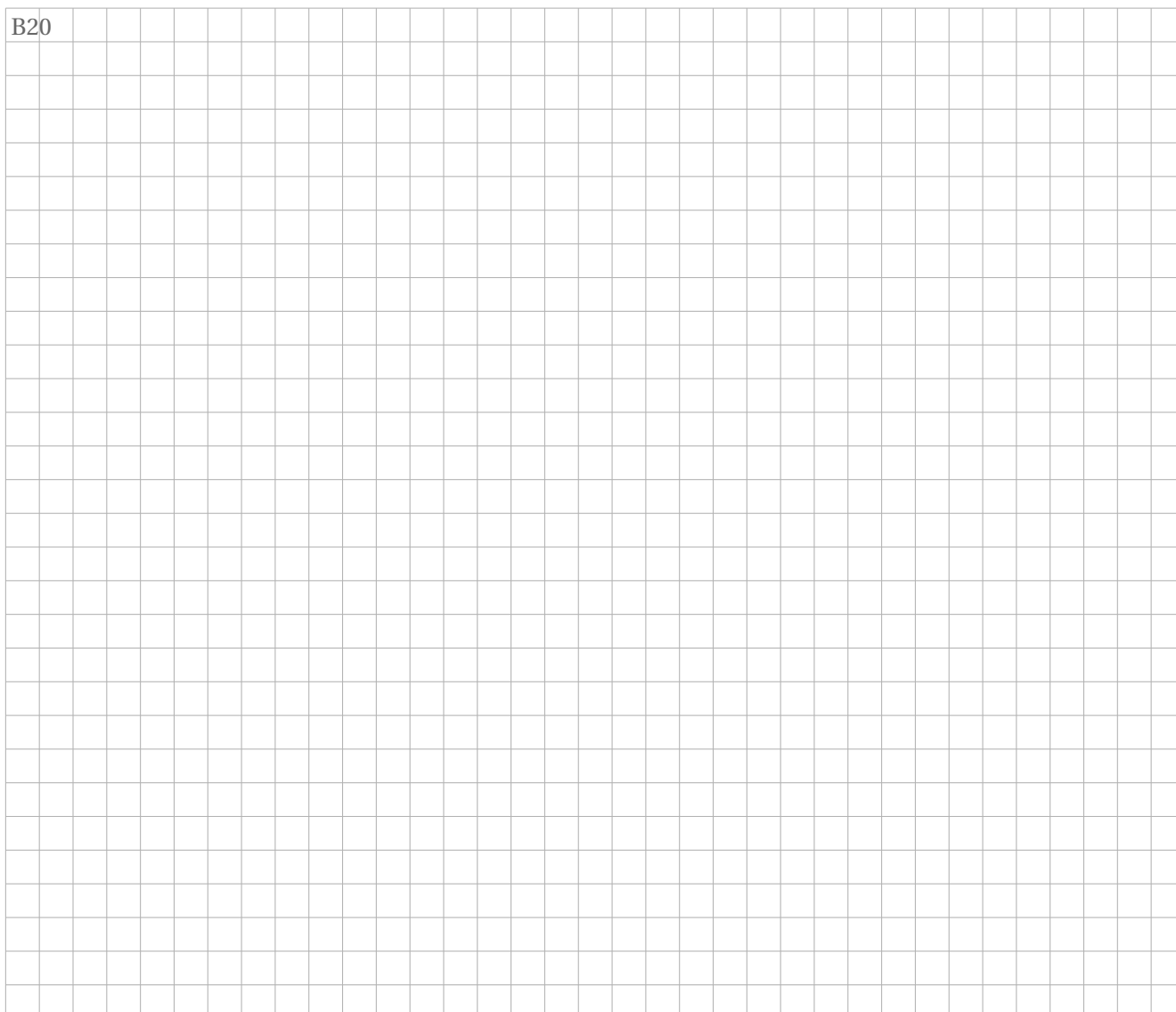
On note Δ le discriminant de l'**équation caractéristique** (E_C) : $ar^2 + br + c = 0$.

(i) Si $\Delta \neq 0$ l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{K} et les solutions de (E_0) sur \mathbb{K} sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} y_H : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{aligned}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

B20



2 ► Cherchons les solutions de l'équation différentielle (E) suivante : $y'' + y = 2 \sin(t)$.

B21



Exercice E.14

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sh}(2t) \quad (\text{E})$$

Indication – *Principe de superposition.*

Exercice E.15

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} \quad (\text{E})$$

III.3 – Exercices additionnels**Exercice E.16**

1. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, déterminer la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

2. Déterminer toutes les fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{C} vérifiant

$$\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2, f(t+u) = f(t)f(u).$$

Indication – *Analyse/synthèse, dériver par rapport à l'une des variables.*

Exercice E.17

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = y + a \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t) + \int_0^1 f(u) du \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Indication – *Analyse/synthèse.*

➤ *Fin du chapitre* ⬅