Chapitre
E
Cours et exercices

Systèmes linéaires

Ce chapitre est l'occasion de réviser et consolider les techniques de résolution d'un système d'équations linéaires. L'accent sera mis sur les méthodes permettant l'élimination progressive de certaines inconnues à l'aide d'opérations élémentaires.
Nous adopterons très rapidement l'écriture matricielle d'un tel système d'équations et nous décrirons avec précision l'algorithme matriciel de Gauss-Jordan permettant de se ramener à une matrice échelonnée par lignes voire échelonnée réduites par lignes.
Nous terminerons en précisant la structure de l'ensemble des solutions d'un tel système linéaire.

Sommaire

I - Généralités sur les systèmes linéaires

N-B Dans tous le chapitre on note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ seront souvent désigné sous le terme de ***scalaires***.

I.1 - Notion de système linéaire

I.1.1 – Définition (Équation linéaire)

On appelle ***équation linéaire*** à p inconnues une équation de la forme :

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_px_p=b$$

où $a_1,a_2,\ldots,a_p,b$ sont des scalaires fixés et $x_1,\ x_2,\ldots,x_p$ sont les inconnues.

Remarques

1 ▶ Les scalaires $a_1,\ldots,a_p$ sont appelés ***coefficients*** de l'équation et le scalaire b est appelé ***second membre*** de l'équation.

2 ▶ On appelle ***solution*** de cette équation tout p-uplet $(s_1,s_2,\ldots,s_p)\in\mathbb{K}^p$ tel que $a_1s_1+a_2s_2+\cdots+a_ps_p=b$.

3 ▶ Résoudre une telle équation dans $\mathbb{K}^p$ consiste à trouver ***toutes ses solutions*** dans $\mathbb{K}^p$.

Exemples

1 ▶ L'équation à deux inconnues $2x+y=3$ est linéaire. Ses solutions dans $\mathbb{R}^2$ sont les couples de la forme $(x,3-2x)$ avec $x\in\mathbb{R}$ (infinité de solutions).

2 ▶ L'équation à trois inconnues $-3x+2y+z=5$ est linéaire. Ses solutions dans $\mathbb{R}^3$ sont les triplets de la forme $(x,y,5+3x-2y)$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (infinité de solutions).

I.1.2 – Définition (Système linéaire)

On appelle ***système linéaire*** de n équations à p inconnues, la donnée simultanée de n équations linéaires à p inconnues :

$$(\mathrm{S}):\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,p}x_p=b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,p}x_p=b_2\\ \quad\vdots\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,p}x_p=b_n\end{cases}$$

Remarques

1 ▶ Les scalaires $a_{i,j}$ ($1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant p$) sont appelés ***coefficients du système*** (S). Et les scalaires b_i ($1\leqslant i\leqslant n$) sont les ***seconds membres***.

2 ▶ La numérotation avec double indice des coefficients permet de repérer précisément leur place. L'indice i étant l'indice de ligne et j l'indice de colonne, on comprend que $a_{i,j}$ est le coefficient de x_j dans la i-ème équation.

3 ▶ On appelle ***solution*** de (S) tout p-uplet $(s_1,s_2...,s_p)\in\mathbb{K}^p$ qui est simultanément solution de n équations constituant (S).

4 ▶ Résoudre un tel système dans $\mathbb{K}^p$ consiste à trouver ***toutes ses solutions*** dans $\mathbb{K}^p$.

Exemples

1 ▶ Considérons le système linéaire réel de 2 équations à deux inconnues suivant :

$$(\mathrm{S}_1):\begin{cases}x+y=1\\ x-y=3\end{cases}$$

Pour résoudre (S_1), raisonnons par ***analyse et synthèse***. ***Si*** (x,y) ***est solution de*** (S_1) ***alors*** en ajoutant les équations on obtient $2x=4$ donc $x=2$ et en retranchant les deux équations on obtient $2y=-2$ donc $y=-1$. ***Réciproquement***, il est clair que $(2,-1)$ est solution car $2+(-1)=1$ et $2-(-1)=3$. Ce système (S_1) a donc pour unique solution le couple $(2,-1)$. L'ensemble de ses solutions (sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$) est donc :

$$\mathscr{S}_1=\Big\{(2,-1)\Big\}$$

2 ▶ Considérons le système linéaire réel de 3 équations à 3 inconnues suivant :

$$(\mathrm{S}_2):\begin{cases}x+y+z=2\\ \quad\;\; y+z=1\\ \quad\;\; y-z=-1\end{cases}$$

Si (x,y,z) ***est solution de*** (S_2) ***alors*** en faisant la demi-somme et la demi-différence des deux dernières équations on obtient facilement $y=0$ et $z=1$. En remplaçant dans la première équation on obtient alors $x=1$. ***Réciproquement***, il est clair que $(1,0,1)$ est bien solution car $1+0+1=2$, $0+1=1$ et $0-1=-1$. Ce système (S_2) a donc pour unique solution le triplet $(1,0,1)$. L'ensemble de ses solutions (sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$) est donc :

$$\mathscr{S}_2=\Big\{(1,0,1)\Big\}$$

I.1.3 – Définition (Système homogène)

Considérons un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$(\mathrm{S}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

(i) Quand les scalaires $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont tous nuls, ont dit que le système linéaire (S) est ***homogène***.

(ii) De façon générale, on dit que :

$$(\mathrm{S}_0) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

est le ***système linéaire homogène associé à*** (S).

uite

Remarque – Il est clair qu'un système homogène a toujours au moins une solution : le p-uplet $(0, \cdots, 0)$.

I.2 - Interprétation géométrique dans le plan et dans l'espace

I.2.1 – Systèmes et intersections de droites dans le plan

On suppose que le plan est rapporté à un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on considère un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$(\mathrm{S}) : \left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right.$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$.

B1

I.2.2 – Systèmes et intersections de plans dans l'espace

On suppose que l'espace est rapporté à un repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et on considère un système de 2 équations à 3 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array}\right.$$

B2

Considérons maintenant un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

B3

I.3 - Écriture matricielle d'un système linéaire

I.3.1 – Définition (Matrice à n lignes et p colonnes)

Une ***matrice*** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est la donnée de np éléments de $\mathbb{K}$ répartis dans un tableau à n lignes et p colonnes.

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple – Par exemple, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

Remarques

1 ▶ Nous noterons $\left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ pour désigner la matrice dont le terme à la i-ème ligne et j-ème colonne est le scalaire $a_{i,j}$.

2 ▶ Pour désigner le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne, on emploie l'expression « coefficient à la place (i, j) ».
Il faut bien retenir que le premier indice indique la ligne et le second indique la colonne.

3 ▶ Une matrice à une seule ligne est appelée une ***matrice ligne***. Une matrice à une seule colonne est appelée une ***matrice colonne***.

4 ▶ Notons que l'on dit que deux matrices A et B sont ***égales*** lorsqu'elles sont de même taille et que les coefficients à la même place sont identiques.

I.3.2 – Définition (Matrice d'un système linéaire, matrice *augmentée* d'une système linéaire)

Considérons un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

La ***matrice du système linéaire*** (S) est la matrice à n lignes et p colonnes :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

La ***matrice augmentée du système linéaire*** (S) est la matrice à n lignes et $p+1$ colonnes :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{bmatrix}$$

Remarque – Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne la matrice de (S) et si on note $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne des seconds membres alors la matrice augmentée du système est souvent notée $M = \left[\, A \mid B \,\right]$.

La barre verticale n'est qu'un outil visuel pour séparer les coefficients relatifs aux inconnues de ceux des seconds membres.

Exemple – Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2a+3b-4c=2 \\ a \qquad\quad +3c=5 \\ -a+2b-5c=13 \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est la suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -5 & 13 \end{array}\right]$$

I.4 - Opérations élémentaires

I.4.1 – Description des opérations élémentaires

Nous allons maintenant décrire des ***opérations élémentaires*** que l'on peut effectuer sur les lignes d'un système ou de la matrice (augmentée) d'un système. On montrera ensuite que ces opérations ne modifient pas l'ensemble des solutions du système.

- Le fait d'échanger deux lignes L_i et L_j se note $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- Le fait d'ajouter $\lambda \cdot L_j$ à L_i, pour $i \neq j$, se note $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.
- Le fait de multiplier L_i par $\alpha \neq 0$ se note $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.

Exemple – On considère le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}.$$

B4

L'intérêt de cette succession d'opérations apparaît dans le résultat suivant.

I.4.2 – Proposition et Définition (Systèmes équivalents)

(i) Deux systèmes linéaires (S) et (S′) sont dits ***équivalents*** (sous-entendu **au sens des opérations élémentaires**) lorsque l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $(S) \sim (S')$.

(ii) Deux systèmes linéaires sont équivalents (au sens des opérations élémentaires) ***si et seulement si*** ils sont équivalents au sens usuel du terme (*i.e.* au sens de la logique).

(iii) En particulier, deux systèmes équivalents (au sens des opérations élémentaires) ont le ***même ensemble de solutions***.

Résultat admis.

Exemple – Reprenons l'exemple précédent :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & 0 \end{array} \right. .$$

On a montré que (S) était équivalent au système :

$$(S') : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & 3 \\ & & y & = & -2 \end{array} \right. .$$

Or il est évident que le système (S′) possède comme unique solution le couple $(3,-2)$. D'après le théorème précédent il en est de même du système (S).

Remarque – Pour les adeptes des notations mathématiques épurées, l'affirmation ***(ii)*** du résultat précédent peut « tout simplement » s'écrire :

$$\Big((S) \sim (S')\Big) \iff \Big((S) \iff (S')\Big)$$

I.4.3 – Réversibilité des opérations élémentaires

Les trois types d'opérations élémentaires sont « réversibles » puisque :

- effectuer deux fois l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ n'a aucun effet sur le système ;
- lorsque $i \neq j$, effectuer $L_i \longleftarrow L_i - \lambda L_j$ après $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ permet de revenir au système initial ;
- lorsque α est un scalaire non nul, effectuer $L_i \longleftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$ après $L_i \leftarrow \alpha L_i$ permet de revenir au système initial.

I.4.4 – Définition (Matrices équivalentes par lignes)

Deux matrices A et A′ sont dites ***équivalentes par lignes*** lorsqu'elle se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

Remarques

1 ▶ Si l'on passe d'un système linéaire (S) à un système linéaire (S′) par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes alors la matrice ***augmentée*** de (S′) s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice ***augmentée*** de (S) et réciproquement.

2 ▶ La réciproque évoquée ci-dessus implique que si deux matrices ***augmentées*** sont équivalentes par lignes alors les systèmes associés sont équivalents donc ont les même solutions.

II - Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

II.1 - Matrices échelonnées par lignes

II.1.1 – Définition (Matrice échelonnée par lignes)

Une matrice est dite ***échelonnée par lignes*** lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) si une ligne est nulle alors toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

(ii) à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à strictement à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On appelle ***pivot*** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Remarque – Les matrices échelonnées par lignes sont immédiatement identifiables par la disposition des zéros ***en escalier*** descendant du haut à gauche vers le bas à droite.

$$\begin{bmatrix} \bullet & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \bullet & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les $\bullet$ sont des pivots.
Les $\star$ sont des coefficients quelconques.

Exemple – Dire si chacune des matrices suivantes est ou pas échelonnée par lignes. Dans l'affirmative entourer ses pivots.

Matrice	Échelonnée par lignes (O/N)	Matrice	Échelonnée par lignes (O/N)
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	

II.1.2 – Définition

Une matrice échelonnée par lignes est dite ***échelonnée réduite par lignes*** lorsqu'elle est nulle ou lorsque :

(i) tous ses pivots sont égaux à 1 ;

(ii) ses pivots sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Remarque – Les matrices échelonnées réduites par lignes sont facilement identifiables « à l'oeil ».

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les $\star$ sont des coefficients quelconques.

Exemple – Dire si chacune des matrices suivantes est ou pas échelonnée réduite par lignes. Dans l'affirmative entourer ses pivots.

Matrice	Échel. réd. par lignes ? (O/N)	Matrice	Échel. réd. par lignes ? (O/N)
$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&2&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1&2&0&4\\0&0&1&2\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&0&1&2\end{bmatrix}$	

II.1.3 – Résolution d'un système échelonné

Les systèmes linéaires dont la matrice augmentée est échelonnée par lignes sont très facile à résoudre.

Exemples

1 ▶ Soit (S) le système linéaire dont la matrice augmentée est (elle est échelonnée réduite par lignes) :

$$M = \begin{bmatrix}1&0&2&0&4\\0&1&2&0&1\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

B5

2 ▶ Soit (S′) le système linéaire dont la matrice augmentée est :

$$M' = \begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

B6

II.2 - Description de l'algorithme du pivot de Gauss

II.2.1 – Description générale

Idée directrice – On a vu que les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système linéaire en un système linéaire qui lui est équivalent donc qui a les mêmes solutions. Qui plus est, en termes de matrices, il est aisé de résoudre un système dont la matrice augmentée est échelonnée en lignes. Il est donc utile de connaître un algorithme permettant d'aboutir, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, à une matrice échelonnée en ligne.

On commence par décrire l'algorithme du ***pivot de Gauss*** appliqué à une matrice $A = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$.

1 ▶ Si la première colonne de A est nulle alors on passe à l'étape **3**. Sinon, quitte à échanger des lignes, on peut se ramener au cas où le coefficient à la place $(1,1)$ est non nul *i.e.* on a :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,m} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1} & a'_{n,2} & \cdots & a'_{n,m} \end{bmatrix} \qquad \text{avec } a'_{1,1} \neq 0$$

2 ▶ Le terme $a'_{1,1}$ est le premier pivot. On effectue, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{a'_{i,1}}{a'_{1,1}} L_1$.
On obtient donc à l'issue de cette étape :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,m} \\ 0 & a''_{2,2} & \cdots & a''_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{n,2} & \cdots & a''_{n,m} \end{bmatrix}$$

3 ▶ À ce stade, on a obtenu dans tous les cas :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{bmatrix} \qquad \text{(quitte à ce que } \alpha_{1,1} = 0).$$

On retourne alors à l'étape **1** avec la matrice :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{bmatrix}$$

À l'issue de la deuxième itération de cette boucle, on a donc :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,m} \\ 0 & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,m} \\ 0 & 0 & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{n,3} & \cdots & \beta_{n,m} \end{bmatrix}$$

Puisqu'à chaque étape, la matrice considérée contient une ligne et une colonne de moins que la précédente, ***cette boucle s'arrête*** nécessairement après au maximum $\min(n-1, m-1)$ itérations.

Par ailleurs, vu les définitions que l'on a adoptées, il n'est pas difficile de comprendre que le résultat final de cet algorithme est ***une matrice échelonnée par lignes, équivalente par lignes à la matrice d'origine.***

II.2.2 – Étude détaillée de quelques exemples

a) **Réduction d'une matrice de type** 3×4

À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, déterminer une matrice ***échelonnée par lignes*** qui soit équivalente (par lignes) à la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Solution :

B7 *Résolution « interactive » à noter sur feuille annexe.*

b) **Exemple d'un système** 4×4**.**

Résoudre le système suivant en réduisant sa matrice ***augmentée*** sous forme échelonnée par lignes :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 5y & + & 3z & - & t & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 3z & + & 4t & = & 0 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & - & 2t & = & 1 \end{array} \right.$$

Solution :

B8 *Résolution « interactive » à noter sur feuille annexe.*

Exercice E.1

Déterminer une matrice échelonnée par lignes (non nécessairement réduite) qui soit équivalente par lignes à la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice E.2

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant ***obligatoirement*** la méthode consistant préalablement à transformer leurs matrices augmentées en matrices échelonnées par lignes (mais pas nécessairement réduites) :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{array} \right. \qquad (S_3) : \left\{ \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right.$$

II.3 - Existence et unicité d'une matrice échelonnée réduite par lignes

Une variante de l'algorithme précédent, appelée ***algorithme du pivot de Gauss-Jordan*** permet d'aboutir à une réduction plus poussée et est l'objet du théorème essentiel suivant.

II.3.1 – Théorème

Toute matrice est équivalente par lignes à une ***unique*** matrice échelonnée réduite par lignes.

Résultat admis.

Nous allons décrire (uniquement sur des exemples) l'algorithme permettant de démontrer l'existence, en revanche, l'unicité sera elle véritablement admise.

Remarque – Dans la suite de ce cours, on appellera ***matrice échelonnée réduite (par lignes)*** de A, l'unique matrice échelonnée réduite par lignes qui est équivalente par lignes à A.

Exemples

1 ▶ Déterminons la ***matrice échelonnée réduite par lignes*** de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution :

B9 *Résolution « interactive » à noter sur feuille annexe.*

2 ▶ Il est possible de résoudre un système linéaire de manière ***totalement matricielle***, en réduisant sa matrice augmentée à sa ***forme échelonnée réduite par lignes***. Résolvons par exemple :

$$\begin{cases} \phantom{-2x-4y+{}} 2z - 2t + 8u = -6 \\ x + 2y + z \phantom{{}-2t} + 5u = -1 \\ -2x - 4y - z \phantom{{}-2t} - 8u = -1 \end{cases}$$

Solution :

B10 *Résolution « interactive » à noter sur feuille annexe.*

III - Ensembles des solutions d'un système linéaire

III.1 - Vocabulaire et exemple

III.1.1 – Définition (Inconnues principales et secondaires)

On note A la matrice augmentée d'un système linéaire (S) et R sa matrice échelonnée réduite. Alors :

(i) les inconnues correspondant aux colonnes des pivots de R sont appelées ***inconnues principales***;

(ii) les autres inconnues sont appelées les ***inconnues secondaires*** ou ***paramètres***.

III.1.2 – Définition (Système compatible ou incompatible)

En conservant les mêmes hypothèses,

(i) si le système (S) admet au moins une solution alors on dit que le système est ***compatible***;

(ii) si le système (S) n'admet aucune solution alors on dit que le système est ***incompatible***.

Exemple – Considérons le système :

$$(S) : \begin{cases} x & & & + & 2z & & & = 1 \\ x & + & y & + & 3z & & & = 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = 5 \\ -3x & + & 2y & - & 4z & + & 2t & = -1 \end{cases}.$$

Solution :

B11 *Résolution « interactive » à noter sur feuille annexe.*

Exercice E.3

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ et on considère les plans $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ d'équations respectives $x + y = 1$, $-x - y + z = 1$ et $2x + 2y - z = 0$. Déterminer l'intersection de ces trois plans.

III.2 - Structure de l'ensemble des solutions

En synthétisant tout ce qui précède, on peut énoncer le résultat suivant :

III.2.1 – Proposition et Définition (Description de l'ensemble des solutions)

Soit A la matrice augmentée d'un système linéaire (S) à p inconnues et R sa matrice échelonnée réduite par lignes.

(i) Si R contient la ligne $[0 \cdots 0\ 1]$ alors (S) est ***incompatible***.

(ii) Si R ne contient pas la ligne $[0 \cdots 0\ 1]$ et s'il n'y a ***que des inconnues principales*** alors (S) admet ***une unique solution***.

(iii) Si R ne contient pas la ligne $[0 \cdots 0\ 1]$ et s'il y a ***au moins une inconnue secondaire*** alors (S) admet une ***infinité de solutions***.

III.2.2 – Proposition et Définition (Rang, nombre de pivots)

On appelle ***rang*** du système (S), et on note rg(S), le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite ***du système homogène associé (attention !)***.

(i) Le nombre de paramètres (ou inconnues secondaires) vaut : $p - \mathrm{rg(S)}$.

(ii) Le système (S) admet une unique solution si et seulement si R ne contient pas la ligne $[0 \cdots 0\ 1]$ et $\mathrm{rg(S)} = p$.

ATTENTION

Dans le cas d'un système incompatible, il y a un pivot dans la dernière colonne, mais celui-ci ne compte pas pour déterminer le rang.

Exemples

1 ▶ Considérons le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ \phantom{x+{}} 2y + 4z = 6 \\ -x \phantom{{}+2y} + z = 0 \end{cases}$$

Si on note A la matrice augmentée de ce système, on a vu précédemment (bloc **B9**) que :

B12

2 ▶ Considérons le système :

$$(\mathrm{S}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & & & + & 2z & & & = 1 \\ x & + & y & + & 3z & & & = 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = 5 \\ -3x & + & 2y & - & 4z & + & 2t & = -1 \end{array}\right. .$$

Si on note A la matrice augmentée de ce système, on a vu précédemment (bloc **B11**) que :

B13

3 ▶ Considérons le système :

$$(\mathrm{S}) : \left\{\begin{array}{rcrl} x & + & 2y & = -1 \\ 2x & + & y & = 1 \end{array}\right. .$$

Notons A la matrice augmentée de ce système, alors :

B14

Exercice E.4

Calculer la matrice échelonnée réduite par lignes de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

En déduire son rang. A-t-on besoin d'aller jusqu'à la forme échelonnée **réduite** pour connaître le rang ?

Exercice E.5

Résoudre les systèmes linéaires suivants en réduisant **obligatoirement** leurs matrices augmentées à leur formes échelonnées réduites par lignes.

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +2y & & = & 1 \\ -2x & +y & +z & = & 0 \\ x & +7y & +z & = & 3 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{rrrrrcl} x & +y & -z & -t & +u & = & 0 \\ 2x & +y & -4z & & +4u & = & 1 \\ x & +2y & -3z & +t & -u & = & 2 \end{array} \right. \qquad (S_3) : \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & 14 \\ 4x & +5y & +6z & = & 32 \\ 7x & +8y & +10z & = & 53 \end{array} \right.$$

III.2.3 – Ensemble des solutions d'un système homogène

Considérons tout d'abord le cas d'un système linéaire homogène (S) dont on note A la matrice augmentée et R la matrice échelonnée réduite de A.
Comme la dernière colonne de A est nulle, c'est également le cas de la matrice R donc cette dernière ne contient jamais la ligne $[0 \ \cdots \ 0 \ 1]$. On retrouve ainsi le fait qu'un tel système est toujours compatible puisque le p-uplet nul est toujours solution.
Il s'ensuit que (S) admet soit une unique solution, soit une infinité. Plus précisément :

Proposition (Ensemble des solutions d'un système homogène)

Soit (S) un système linéaire homogène de n équation à p inconnues.

(i) Alors (S) n'admet que la solution triviale si et seulement si $\operatorname{rg}(S) = p$.

(ii) Et si $n < p$ alors (S) admet une infinité de solutions.

III.2.4 – Ensemble des solutions d'un système quelconque

Terminons avec la description de l'ensemble des solutions d'un système linéaire quelconque (mais compatible).

Proposition (Ensemble des solutions d'un système quelconque)

Considérons un système linéaire (S) de système linéaire homogène associé (S_0).
On suppose que $X_P \in \mathbb{K}^p$ est une solution « ***particulière*** » de (S) (ce qui prouve que (S) est compatible).
Si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (S_0) alors on a :

$$\mathscr{S} = \left\{ X_P + X_H \, ; \, X_H \in \mathscr{S}_0 \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simple} \\ \text{notation}}}{=} X_P + \mathscr{S}_0$$

Résultat admis.

Notons que cela ressemble très fortement à ce que nous avons déjà vu (et démontré) pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants : la solution générale de l'équation complète (respectivement du système complet) s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène (respectivement du système homogène).

IV - Exercices additionnels

IV.1 - Systèmes avec paramètre(s)

Exercice E.6

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On note (S) le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y-z=a \\ -2x-3y+3z=b \\ x+y-2z=c \end{cases}$$

(i) À quelle condition sur a, b et c le système (S) admet-il des solutions ?

(ii) Résoudre (S) dans $\mathbb{R}^3$, lorsque $(a,b,c)=(0,0,1)$ puis $(a,b,c)=(1,-2,1)$.

Exercice E.7

Discuter, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions du système

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=1 \end{cases}$$

Exercice E.8

Résoudre suivant la valeur du réel t le système suivant :

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} (2+t)x+2y-z=0 \\ 2x+(t-1)y+2z=0 \\ -x+2y+(2+t)z=0 \end{cases}$$

IV.2 - Just for fun !

Exercice E.9

Résoudre en utilisant **TOUS** les moyens imaginables le « gros » système linéaire suivant :

$$\begin{cases}
-11x_1+8x_2+8x_3-4x_4+2x_5+7x_6+2x_7+x_8-x_9 = 57 \\
5x_1+9x_2-19x_3+44x_4-3x_5-7x_6-15x_7+7x_8-3x_9-2x_{10} = -126 \\
1x_1-x_2+14x_3-17x_4-3x_6-10x_7+11x_8-7x_9-3x_{10} = -222 \\
-3x_1-x_2-4x_3-6x_4+15x_5-13x_6-15x_7+11x_8-4x_9-x_{10} = -132 \\
3x_1+7x_2-10x_3+26x_4-6x_5-5x_6-18x_7+11x_8-6x_9-3x_{10} = -223 \\
-3x_1-3x_2-13x_3+7x_4+28x_5-18x_6-13x_7+7x_8+x_9+2x_{10} = 68 \\
3x_1-8x_2-3x_3+15x_4+2x_5+3x_6+9x_7-7x_8+3x_9 = 84 \\
-4x_1-4x_2-4x_3-x_4+13x_5-4x_6+2x_7-2x_8+3x_9+2x_{10} = 130 \\
-5x_1-7x_2-3x_3+4x_4+6x_5+6x_6+16x_7-12x_8+7x_9+3x_{10} = 267 \\
-2x_1-2x_2-x_3+3x_5+x_6+4x_7-3x_8+2x_9+x_{10} = 80
\end{cases}$$

Une fois la résolution effectuée, que remarque-t-on ?

Fin du chapitre