Chapitre
F
Cours et exercices

Vocabulaire ensembliste et modes de raisonnement

À l'occasion des différents chapitres de début d'année, essentiellement consacrés à des techniques calculatoires, nous avons commencé à mettre en place le vocabulaire, les notations et certains types de raisonnement propres aux mathématiques.
Le but de ce présent chapitre est de faire le point sur ces différents aspects – véritablement fondamentaux – et de les compléter afin d'aborder sereinement la suite du programme.

Sommaire

I - Rudiments de logique

I.1 - Propositions logiques

Avant de commencer la présentation des principaux modes de raisonnement, nous devons clarifier quelques points de logique « élémentaire ».

I.1.1 – Définition (Proposition)

On appelle ***proposition*** un énoncé (en général mathématique) auquel on attribue (souvent mais pas toujours) une ***valeur de vérité***.

Exemples

1 ▶ La ***proposition*** $A =$ « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 4$ » est un simple énoncé mathématiques affirmant qu'il existe un entier naturel dont le carré vaut 4. Cet énoncé est ***vrai*** (cet entier est d'ailleurs unique et il s'agit de $n = 2$).

2 ▶ La ***proposition*** : $B =$ « $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2$ » est un énoncé qui affirme l'existence d'un entier dont le carré vaut 2. Cette fois cet énoncé est **faux**. Cela est bien sûr conséquence du fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel donc non entier.

Remarques

1 ▶ Il est important de comprendre la différence entre la ***syntaxe*** *i.e.* la manière d'***écrire*** les propositions et la ***sémantique*** *i.e.* le ***sens*** que l'on attribue aux propositions.

2 ▶ D'un point de vue formel une sémantique sur un ensemble E de propositions est une application v de E dans l'ensemble de Boole $\{0,1\}$. On dit alors que A est vraie si $v(A) = 1$ et que A est fausse si $v(A) = 0$.

ATTENTION

Dans l'usage courant, ***écrire une proposition*** c'est en même temps (et de manière sous-entendue) ***affirmer que celle-ci est vraie***. Pourtant, il est souvent utile d'écrire un énoncé sans (ou plutôt avant de) se préoccuper de sa ***véracité*** (*i.e.* son caractère vrai ou faux). Cela n'est pas si gênant. Dans la pratique, il faut surtout se souvenir que l'***écriture des mathématiques*** consiste essentiellement à ***faire des phrases*** (et non pas des calculs comme le pense le profane). Le ***langage mathématique*** est en quelque sorte un deuxième langage (avec ses règles strictes) que l'on utilise en parallèle (et pas à la place) de notre ***langage naturel***.

S'il y a des subtilités ou des ambiguïtés n'hésitons pas à tirer parti du meilleur des deux mondes en écrivant des phrases du type :

- l'énoncé $A =$ « ... » est faux;
- l'énoncé $A =$ « ... » est vrai;
- l'énoncé $A =$ « ... » est-il vrai ?;
- démontrons que l'énoncé $A =$ « ... » est vrai.

I.2 - Négation, conjonction, disjonction

I.2.1 – Définition (Connecteurs ou opérateurs logique)

Étant donné un ensemble de propositions, nous disposons sur celui-ci des ***opérateurs*** (ou ***connecteurs***) ***logiques*** usuels :

– l'opérateur binaire ET appelé ***conjonction*** (autre notation : $\wedge$);
– l'opérateur binaire OU appelé ***disjonction non exclusive*** (autre notation : $\vee$);
– l'opérateur unaire NON appelé ***négation*** (autre notation : $\neg$);

dont la sémantique est définie par les tables de vérité suivantes :

A	B	A ET B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	A OU B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	NON A
1	0
0	1

Remarques

1 ▶ Attention, en logique mathématique, le OU n'est pas exclusif, contrairement à ce que le mot *disjonction* pourrait laisser croire.

2 ▶ On appellera ***proposition composée*** une proposition obtenue à partir de propositions élémentaires (parfois appelées ***atomes***), à l'aide des opérateurs définis précédemment. Par exemple :

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} \text{ ET } \big(\mathrm{B} \text{ OU } (\text{NON } \mathrm{C})\big)$$

3 ▶ On dira que deux propositions composées sont ***logiquement équivalentes*** si elles ont la même table de vérité. Autrement dit si elles ont la même valeur de vérité quel que soit le *contexte*.

4 ▶ Étant donné une proposition A, les propositions A et NON (NON A) sont logiquement équivalentes (autrement dit le contraire du contraire d'un énoncé est équivalent à l'énoncé initial).
Cela peut se vérifier très facilement par une table de vérité.

✎ Exercice F.1 (Distributivité de la conjonction et de la disjonction, l'une par rapport à l'autre)

À l'aide de tables de vérité, démontrer que pour toutes propositions A, B et C :

1. les propositions suivantes sont logiquement équivalentes : (A ET B) OU C et (A OU C) ET (B OU C)
2. les propositions suivantes sont logiquement équivalentes : (A OU B) ET C et (A ET C) OU (B ET C)

Solution

B1

✎ Exercice F.2 (Loi de Morgan)

À l'aide de tables de vérité, démontrer que pour toutes propositions A et B :

(i) les propositions suivantes sont logiquement équivalentes : NON (A ET B) et (NON A) OU (NON B)

(ii) les propositions suivantes sont logiquement équivalentes : NON (A OU B) et (NON A) ET (NON B)

Exemples

1 ▶ Le contraire de : A = « $x \geqslant 0$ ET $x \leqslant 1$ »
est : NON A = « $x < 0$ OU $x > 1$ »

2 ▶ Le contraire de : A = « n est divisible par 2 ou divisible par 5 »
est : NON A = « n n'est divisible ni par 2 ni par 5 »

I.3 - Implication

I.3.1 – Définition

Étant donné deux propositions A et B l' ***implication*** $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$ (qui se lit A ***implique*** B) est une *abréviation* (ou *synonyme*) de la proposition (NON A) OU B.

I.3.2 – Table de vérité de l'implication

Afin de mieux comprendre cette notion, dressons la table de vérité de ce nouveau ***connecteur logique*** :

A	B	NON A	$A \Longrightarrow B$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Remarques

1 ▶ On retiendra que la proposition $A \Longrightarrow B$ est fausse dans ***le seul cas*** où A est vraie et B est fausse.

2 ▶ Attention, l'implication mathématiques peut sembler ***contre-intuitive***. D'après la table de vérité l'implication $A \Longrightarrow B$ est vraie quand A et B le sont.
Ainsi, l'implication : $\boxed{(1=2) \Longrightarrow (3=4) \text{ est } \textbf{\textit{vraie}}}$.

3 ▶ Au lieu de « A ***implique*** B », on pourra aussi utiliser le vocabulaire suivant :
- B ***est impliqué par*** A ;
- ***si*** A ***alors*** B (ou si A est vraie alors B est vraie) ;
- B est une ***condition nécessaire*** pour avoir A ;
- A est une ***condition suffisante*** pour avoir B.

4 ▶ Notons que la $\boxed{\text{négation de } A \Longrightarrow B}$ (abréviation de (NON A) OU B) est :

$$\text{NON}\big((\text{NON } A) \text{ OU } B\big) = \big(\text{NON } (\text{NON } A)\big) \text{ ET } \big(\text{NON } B\big) = \boxed{A \text{ ET } \big(\text{NON } B\big)}$$

Exemples

1 ▶ Si $n \in \mathbb{N}$, l'implication suivante est vraie : « n est divisible par 4 » $\Longrightarrow$ « n est divisible par 2 »

2 ▶ La négation de l'implication précédente est : « n est divisible par 4 » ET « n n'est pas divisible par 2 »
Bien entendu, ce deuxième énoncé est faux (quel que soit l'entier n).

I.4 - Équivalence

I.4.1 – Définition

Étant donné deux propositions A et B l'***équivalence*** $A \Longleftrightarrow B$ (qui se lit A ***équivaut*** à B) est une abréviation de la proposition $(A \Longrightarrow B)$ ET $(B \Longrightarrow A)$.

I.4.2 – Table de vérité de l'équivalence

Afin de mieux comprendre cette notion, dressons la table de vérité de ce nouveau ***connecteur logique***. On constate (et cela est cohérent avec l'usage courant) que $A \Longleftrightarrow B$ est vraie lorsque A et B sont simultanément vraies ou simultanément fausses (et seulement dans ce cas).

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$A \Longleftrightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Remarques

1 ▶ Dans la définition de l'équivalence $A \Longleftrightarrow B$ il est clair que A et B ont un rôle symétrique. Autrement dit, les énoncés $A \Longleftrightarrow B$ et $B \Longleftrightarrow A$ sont équivalents. **Ouf!**

2 ▶ Au lieu de « A ***équivaut*** à B », on pourra aussi utiliser le vocabulaire suivant :
- A est ***équivalente*** à B ;
- A ***si et seulement si*** B (ou A est vraie si et seulement si B est vraie) ;
- A est une ***condition nécessaire et suffisante*** pour avoir B.

Exemple – Si $n \in \mathbb{N}$ cette équivalence est vraie : « n est divisible par 2 et par 5 » $\Longleftrightarrow$ « n est divisible par 10 »

I.5 - Réciproque

I.5.1 – Définition

La ***réciproque*** d'une implication $A \Longrightarrow B$ est l'implication $B \Longrightarrow A$.

Afin de mieux comprendre cette notion, dressons la table de vérité de la ***réciproque***.
Il est essentiel de comprendre qu'il n'y a aucun lien logique entre une implication et sa réciproque. Autrement dit elles sont vraies ou fausses, indépendamment l'une de l'autre. Et cela se comprend justement en lisant la table de vérité.

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Exemple – Si $n \in \mathbb{N}$, la réciproque de : « n est divisible par 4 » $\Longrightarrow$ « n est divisible par 2 »
est l'implication : « n est divisible par 2 » $\Longrightarrow$ « n est divisible par 4 »
La première de ces implications est bien sûr vraie et la deuxième est fausse.

Remarque – L'équivalence $A \Longleftrightarrow B$ est la conjonction de l'implication $A \Longrightarrow B$ et de sa réciproque $B \Longrightarrow A$.

I.6 - Contraposée

I.6.1 – Définition

La *contraposée* d'une implication $A \Longrightarrow B$ est l'implication $(\text{NON } B) \Longrightarrow (\text{NON } A)$.

Afin de mieux comprendre cette notion, dressons la table de vérité de la ***contraposée***.
Cette fois, ***contrairement au cas d'une réciproque***, il y a ***équivalence logique entre une implication et sa contraposée***. Pour le constater, il suffit de le lire dans la table de vérité.

A	B	NON A	NON B	$A \Longrightarrow B$	$(\text{NON } B) \Longrightarrow (\text{NON } A)$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Exemple – Si $n \in \mathbb{N}$ alors la contraposée de l'implication : « n^2 est pair » $\Longrightarrow$ « n est pair »
est l'implication : « n est impair » $\Longrightarrow$ « n^2 est impair »
Nous avons déjà vu (dans le chapitre A) que ces propositions sont vraies (pour tout entier n).

I.7 - Négation et quantificateurs

Un grand nombre d'énoncés mathématiques se présentent sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \text{« } \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ »} \\ B &= \text{« } \exists x \in E,\ \mathscr{P}(x) \text{ »} \end{aligned}$$

où E est un ensemble et $\mathscr{P}$ est une proposition (on dit aussi *prédicat*) dépendant de x.

On rappelle que la signification d'un tel énoncé est la suivante :

$$\begin{aligned} A &= \text{« La propriété } \mathscr{P} \text{ est vraie pour tout } x \text{ appartenant à E. »} \\ B &= \text{« Il existe (au moins) un élément } x \text{ de E ayant la propriété } \mathscr{P}. \text{ »} \end{aligned}$$

La négation d'un tel énoncé s'obtient en remplaçant $\forall$ par $\exists$, $\exists$ par $\forall$ et en niant le prédicat final (celui-ci pouvant être composé bien sûr) :

$$\begin{aligned} \text{NON } A &= \text{« } \exists x \in E,\ \big(\text{NON } \mathscr{P}(x)\big) \text{ »} \\ \text{NON } B &= \text{« } \forall x \in E,\ \big(\text{NON } \mathscr{P}(x)\big) \text{ »} \end{aligned}$$

Exemples

1 ▶ Considérons les deux énoncés (vrais) suivants : $A = $ « $\forall z \in \mathbb{U}_4,\ |z| = 1$ » et $B = $ « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 4$ ».
Leur négations (fausses) sont : NON $A = $ « $\exists z \in \mathbb{U}_4,\ |z| \neq 1$ » et NON $B = $ « $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \neq 4$ »

2 ▶ La négation de l'énoncé (vrai) suivant : $A = $ « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ »
est l'énoncé (faux) suivant : NON $A = $ « $\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$ »

II - Principaux modes de raisonnements

II.1 - Raisonnement direct

Méthode F.1

Un ***raisonnement direct*** est une méthode de démonstration consistant essentiellement en une succession de déductions logiques élémentaires (terme que nous ne définirons pas de manière rigoureuse).

Voici un exemple dans le théorème suivant.

II.1.1 – Théorème

La somme de deux entiers pairs est paire.

Démonstration

Si x et y sont pairs **alors** il existe des entiers a et b tels que $x = 2a$ et $y = 2b$. On a **alors** :

$$x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$$

On en **déduit** que $x + y$ est un nombre pair.

II.2 - Raisonnement par contraposée

Méthode F.2

Un ***raisonnement par contraposée*** repose sur le fait (déjà vu) qu'une implication $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$ et sa contraposée $(\text{NON } \mathrm{B}) \Longrightarrow (\text{NON } \mathrm{A})$ sont logiquement équivalentes. Les deux énoncés $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$ et $(\text{NON } \mathrm{B}) \Longrightarrow (\text{NON } \mathrm{A})$ étant logiquement équivalent, démontrer l'un c'est démontrer l'autre.

Voici un exemple classique de raisonnement par contraposée avec le théorème suivant.

II.2.1 – Théorème

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration

Raisonnons par contraposée en prouvant que si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair.
Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
On a alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ce qui prouve que n^2 est impair.

II.3 - Raisonnement par l'absurde

Méthode F.3

Un ***raisonnement par l'absurde*** repose sur le fait qu'un énoncé P est vrai si et seulement si son contraire est faux.

Ainsi, pour démontrer que P est vrai, on montre que NON P conduit (par une suite de déduction logique) à une contradiction ce qui prouve que NON P est faux et donc que P est vrai.

Si l'on souhaite démontrer un théorème de la forme $\mathrm{H} \Longrightarrow \mathrm{C}$ on montre donc que H ET (NON C) conduit à une contradiction.

Voici un exemple.

II.3.1 – Théorème (Irrationalité de $\sqrt{2}$)

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration

Si par l'absurde $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Quitte à réduire cette fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseurs communs (autre que 1).

En élevant au carré on a alors $2b^2 = a^2$. On en déduit que a^2 est pair et donc que a est pair (voir juste avant). Il existe donc $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = 2\alpha$. On a alors $2b^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$ d'où $b^2 = 2\alpha^2$. On en déduit que b^2 est pair et donc que b est pair.

Ainsi a et b sont pairs ce qui ***contredit*** le fait qu'ils n'ont pas de diviseur commun.

II.4 - Démonstration d'une équivalence

Méthode F.4

Pour démontrer une équivalence $P \iff Q$ on peut :

- soit procéder par ***double implication*** en démontrant séparément $P \implies Q$ et $Q \implies P$;
- soit raisonner directement par équivalence (symbole $\iff$ ou ***si et seulement si***), mais ***attention***, il faudra bien s'assurer que chaque étape est bien équivalente à la précédente.

Pour démontrer l'équivalence entre 3 propriétés P_1, P_2 et P_3 (ou plus) on peut raisonner de manière **cyclique** en prouvant que $P_1 \implies P_2$,que $P_2 \implies P_3$ et que $P_3 \implies P_1$.

III - Raisonnement par récurrence

III.1 - Principe de récurrence

Le principe de récurrence (et ses variantes) est intimement lié aux propriétés de l'ordre sur $\mathbb{N}$. Nous n'allons pas construire de manière rigoureuse l'ensemble $\mathbb{N}$ mais on retiendra que cet ensemble est soumis à quelques ***axiomes*** (par exemple ceux de Péano). Une conséquence (parmi d'autres) de ces axiomes est la suivante : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

III.1.1 – Théorème (« Principe » de récurrence)

Soit $\mathscr{P}(n)$ un énoncé dépendant d'un entier naturel n. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vrai ;
- $\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.

Alors $\mathscr{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant n_0$.

Démonstration

B2

B2

En pratique, dans une démonstration par récurrence, on démontre d'abord que $\mathscr{P}(n_0)$ est vrai pour un certain entier n_0 (**initialisation**) puis que $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$ pour tout $n \geqslant n_0$ (**hérédité**).

III.2 - Récurrence double

III.2.1 – Théorème (« Principe » de récurrence double))

Soit $\mathscr{P}(n)$ un énoncé dépendant d'un entier naturel n. Le **principe de récurrence double** affirme que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ ET $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vrais
- $\forall n \geqslant n_0,\ \Big(\mathscr{P}(n) \text{ ET } \mathscr{P}(n+1)\Big) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$

alors $\mathscr{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant n_0$.

Démonstration

Ce principe se démontre à partir du principe de récurrence simple en posant $\mathscr{R}(n) = \Big(\mathscr{P}(n) \text{ ET } \mathscr{P}(n+1)\Big)$.

Voici un exercice à résoudre par récurrence double.

Exercice F.3

Si u est la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$$

Solution (par récurrence double) :

B3

B3

III.3 - Récurrence forte

III.3.1 – Théorème (« Principe » de récurrence forte))

Soit $\mathscr{P}(n)$ un énoncé dépendant d'un entier naturel n. Le **principe de récurrence forte** affirme que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vrai
- $\forall n \geqslant n_0, \left(\mathscr{P}(n_0) \text{ ET } \mathscr{P}(n_0+1) \text{ ET } \cdots \text{ ET } \mathscr{P}(n)\right) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$

alors $\mathscr{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant n_0$.

Démonstration

Ce principe se démontre à partir du principe de récurrence simple en posant :

$$\mathscr{R}(n) = \left(\mathscr{P}(n_0) \text{ ET } \mathscr{P}(n_0+1) \text{ ET } \cdots \text{ ET } \mathscr{P}(n)\right)$$

Voici un exemple très classique.

III.3.2 – Théorème (Existence de la décomposition d'un entier en facteurs premiers)

Tout entier $n \geqslant 2$ est un produit (éventuellement réduit à un seul facteur) de nombres premiers.

Solution (par récurrence forte) :

B4

B4

IV - Vocabulaire ensembliste

IV.1 - Ensembles

IV.1.1 – Notion d'ensemble

Dans le système axiomatique le plus couramment employé en mathématiques (théorie **ZFC** pour **Z**ermolo, **F**raenkel et axiome du ***choix***), la notion d'ensemble n'est pas défini au sens strict du terme. Disons plutôt que c'est une ***notion première*** qui obéit à un certain nombre d'***axiomes***. La présentation de ces axiomes dépasse le cadre de notre programme même si certains d'entre eux ne font que formaliser des pratiques qui nous sont familières.

Exemples

1 ▶ Si E est un ensemble constitué d'un seul élément x on dit que E est un ***singleton*** et on note $\mathrm{E} = \{x\}$.

2 ▶ Si E est un ensemble constitué de deux éléments x et y on dit que E est une ***paire*** et on note $\mathrm{E} = \{x, y\}$.

Remarques

1 ▶ Une des choses que clarifient l'axiomatique est la notion d'***appartenance***. En ce qui nous concerne, nous en resterons à une vision intuitive : x ***appartient*** à E (ce que l'on note $x \in \mathrm{E}$) signifie que x est un des ***éléments*** de E.
Remarque dans la remarque - La phrase précédente frise l'escroquerie intellectuelle car, à vrai dire, que signifie « être un élément de E » ? On vous avais prévenu : on en reste à une vision intuitive.

2 ▶ Autre point que clarifie l'axiomatique : l'***égalité entre ensemble***. En substance, deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

3 ▶ Un autre de ces axiomes affirme l'existence d'un ***ensemble vide*** : celui-ci est caractérisé par le fait qu'il ne contient aucun élément. Et celui-ci est d'ailleurs unique et est noté $\varnothing$.

4 ▶ Dans cette axiomatique, tous les objets sont des ensembles. Oui, oui, *tous* les objets. Y compris les nombres. Par exemple, une des définitions formelles (pas du tout utile à notre niveau) des entiers naturels est la suivante :

$$\begin{aligned}
0 &\overset{\text{déf}}{=} \varnothing \\
1 &\overset{\text{déf}}{=} \{\varnothing\} \\
2 &\overset{\text{déf}}{=} \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &\overset{\text{déf}}{=} \big\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\big\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

IV.1.2 – Mode de description d'un ensemble

Il y a plusieurs moyens pour décrire un ensemble (dans ce contexte, décrire un ensemble signifie être capable de dire précisément quels sont ses éléments).

- On peut description un ensemble ***en extension*** en donnant la liste de ses éléments :

$$\mathrm{E} = \left\{a, b, c, d\right\} \quad \mathrm{F} = \left\{1, 2, 3\right\}$$

- On peut également description un ensemble ***en compréhension*** c'est à dire qu'on le définit par une propriété caractéristique parmi les éléments d'un ensemble donné. L'ensemble des réels dont le carré vaut 4 se note par exemple :

$$\mathrm{E} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4\right\}$$

  Bien entendu il s'agit dans ce cas de la *paire* $\left\{-2, 2\right\}$.

- On peut aussi décrire un ensemble comme ***l'ensemble des images par une fonction*** (voir ci-après). Par exemple :

$$\mathrm{E} = \left\{k^2,\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

  désigne l'ensemble des carrés parfaits c'est à dire l'ensemble des images des entiers naturels par la fonction carré.

IV.1.3 – Théorème (« Paradoxe » de Russel)

Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

Démonstration

B5

IV.2 - Produit cartésien d'ensembles

IV.2.1 – Définition

Produit cartésien de deux ensembles Étant donné deux ensembles E et F, on appelle ***produit cartésien*** de E et F l'ensemble $E \times F$ constitué des *couples* (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple – Si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$ on a :

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Remarque – Par définition il est donc équivalent d'écrire « $\forall x \in E, \forall y \in F$ » et « $\forall (x, y) \in E \times F$ ».

IV.2.2 – Définition

Généralisation Étant donné des ensembles $E_1, \cdots, E_n$, on appelle *produit cartésien* de $E_1, \ldots, E_n$ l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n$ constitué des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.

Dans le cas où $E_1 = \cdots = E_n = E$ on note ce produit E^n.

IV.3 - Sous-ensembles

IV.3.1 – Définition (Sous-ensemble)

Si E et F sont deux ensembles, on dit que E est ***inclus*** dans F (ou que E est un *sous-ensemble* ou une *partie* de F) et on note $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Formellement cela s'écrit :

$$E \subset F \overset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in E,\ x \in F$$

Si E est un ensemble donné, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E.

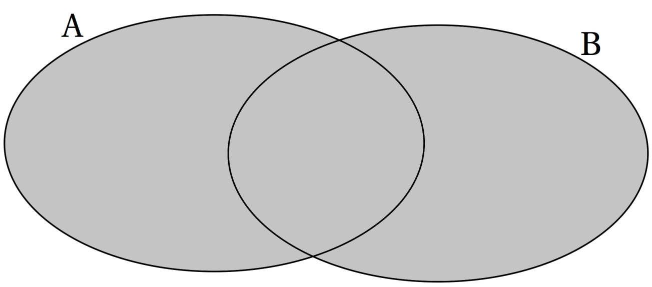
Exemple – Si $E = \{a, b, c\}$ on a :

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\Big\}$$

IV.3.2 – Opérations sur les parties d'un ensemble

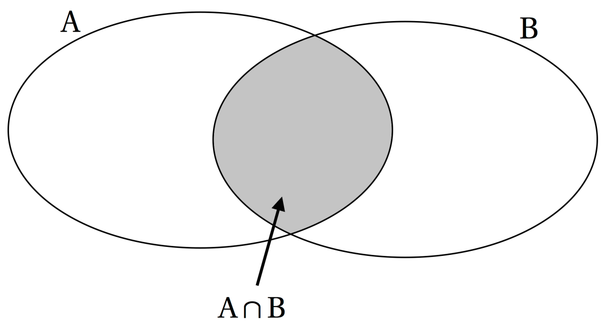
L'ensemble E étant fixé, on peut définir sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E un certain nombre d'***opérations ensemblistes***.

- Pour tout $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^2$ la ***réunion*** de A et B est définie par : $A \cup B \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E, (x \in A \text{ OU } x \in B)\}$.

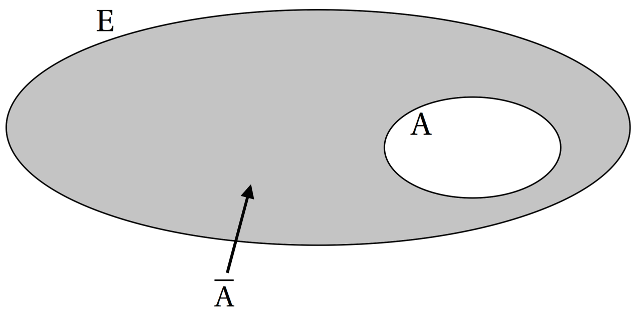


$A \cup B$

- Pour tout $(A,B) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2$ l'***intersection*** de A et B est définie par : $A \cap B \overset{\text{déf}}{=} \left\{x \in E, (x \in A \text{ ET } x \in B)\right\}$.



- Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$ le ***complémentaire*** de A dans E est définie par : $\left\{x \in E,\ x \notin A\right\}$. Celui-ci est noté $\complement_E^A$, $\overline{A}$ ou $E \setminus A$.



Exercice F.4

Soit E un ensemble fixé. Pour tout $(A,B,C) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^3$ démontrer que :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad \text{et} \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Exercice F.5

Soit E un ensemble fixé. Pour tout $(A,B) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2$ démontrer que :

1. $A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$;
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

IV.4 - Compléments sur les fonctions (ou applications)

IV.4.1 – Rappels

Voici un résumé de ce que nous savons déjà à propos des fonctions (on se limite aux généralités et on écarte ici tout ce qui est spécifique aux fonctions réelles de la variable réelle).

- Si E et F sont deux ensembles, une ***fonction*** (ou ***application***) f de E dans F est un moyen d'***associer*** à chaque élément x de E un unique élément de F appelé son ***image*** par f et qui est noté $f(x)$.

  On dit que E est l'***ensemble de départ*** de f (ou son *ensemble de définition*), que F est son ***ensemble d'arrivée*** et on résume souvent cela par la notation $f : E \to F$.

  Exemples

  – Si E est un ensemble, l'***application identité*** de E est l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathrm{Id}_E(x) = x$$

  – Si A est une partie d'un ensemble E, ***l'indicatrice de*** A est l'application $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \overline{A} = E \setminus A \end{cases}$$

- Si f est une fonction de E dans F et que A est une partie (ou sous-ensemble) de E, on appelle ***restriction*** de f à A la fonction :
$$f_{|\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
- À toute fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est associée son ***graphe***, qui est un sous-ensemble de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$:
$$\mathscr{C}_f = \left\{ \left(x, f(x)\right), x \in \mathrm{E} \right\}$$
- Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $y \in \mathrm{F}$, on appelle ***antécédent de*** y ***par*** f tout élément $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$.
- Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ on appelle ***image de*** A ***par*** f la partie de F suivante :
$$f(\mathrm{A}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ f(x) \;/\; x \in \mathrm{A} \right\}$$
Ainsi, $f(\mathrm{A})$ est constitué des images de tous les éléments de A.
- Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ on appelle ***tiré en arrière*** (ou ***image réciproque***) de B par f la partie de E suivante :
$$f^{\leftarrow}(\mathrm{B}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ x \in \mathrm{E} \;/\; f(x) \in \mathrm{B} \right\}$$
Ainsi, $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$ est constitué des antécédents de tous les éléments de B.

  Remarques – Contrairement à ce que la notation pourrait laisser croire, on n'impose pas dans cette définition la bijectivité de f. ***Mais*** si f ***est bijective*** alors $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$ est bien l'image de B par l'application f^{-1} (réciproque de la bijection f).
- Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, la ***composée*** de f et de g est l'application $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ définie par :
$$\forall x \in \mathrm{E},\; g \circ f(x) \overset{\text{déf}}{=} g\big(f(x)\big)$$
- On dit que $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est ***bijective*** si tout élément de F possède un unique antécédent par c'est-à-dire :
$$\forall y \in \mathrm{F},\; \exists! x \in \mathrm{E},\; f(x) = y$$
- La ***réciproque*** d'une bijection $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est l'application $f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ définie par :
$$\forall y \in \mathrm{F},\; f^{-1}(y) \overset{\text{déf}}{=} \text{« l'unique antécédent de } y \text{ par } f \text{ »}$$
- Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, f^{-1} est également bijective et on a : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

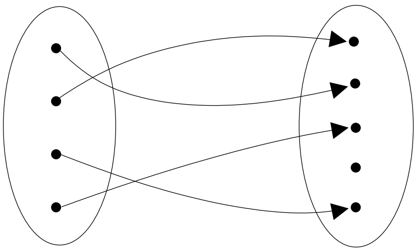
Remarque – Si l'on revient quelques instants sur les fonctions réelles de la variable réelle, notons que les notions que nous venons de rappeler nous on permis, dans le chapitre D, de donner les définitions suivantes :
$$\mathrm{Arcsin} \overset{\text{déf}}{=} \left(\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \qquad \mathrm{Arccos} \overset{\text{déf}}{=} \left(\cos_{|[0, \pi]}\right)^{-1} \qquad \mathrm{Arctan} \overset{\text{déf}}{=} \left(\tan_{|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}$$

IV.4.2 – Définition (Fonction *injective* (ou *injection*))

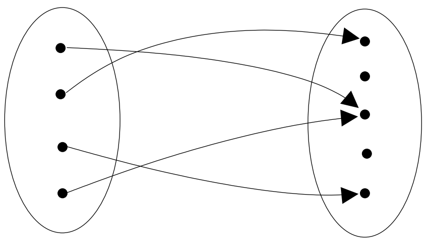
On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est ***injective*** (ou que c'est une ***injection***) si tout élément de F possède ***au plus*** un antécédent par f. Autrement dit chaque élément de F est atteint ***au plus*** une fois par la fonction.

Remarques

1 ▶ Si E et F sont des ensembles finis, cela signifie graphiquement qu'aucun éléments de F n'est atteint par plusieurs flèches.

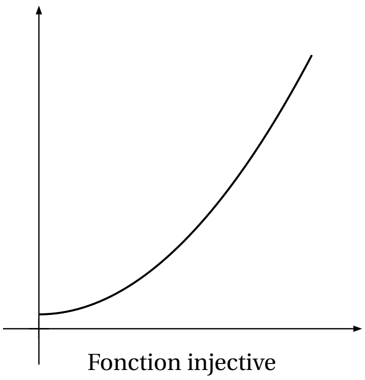


Fonction injective

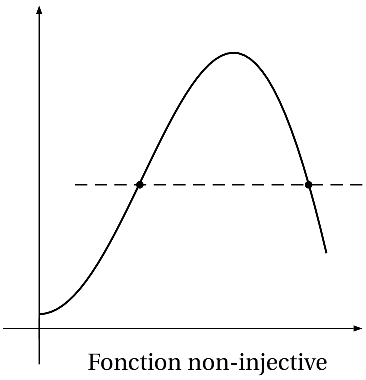


Fonction non–injective

2 ▶ Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela signifie graphiquement qu'il est impossible de trouver deux points du graphe de f à la même hauteur.



Fonction injective



Fonction non-injective

3 ▶ La définition est équivalente à dire que deux éléments différents de E ont toujours des images différentes. Ou encore que deux éléments ayant la même image sont nécessairement égaux. En langage mathématique cela s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

4 ▶ En général, pour justifier qu'une fonction f est injective, on considère deux éléments ayant la même image et on *démontre* qu'ils sont égaux (par exemple par un calcul).

5 ▶ Si f est une *application linéaire*, il suffit de démontrer que son noyau est réduit à $\{0\}$ (voir plus tard dans l'année).

6 ▶ Une fonction strictement monotone est automatiquement injective.

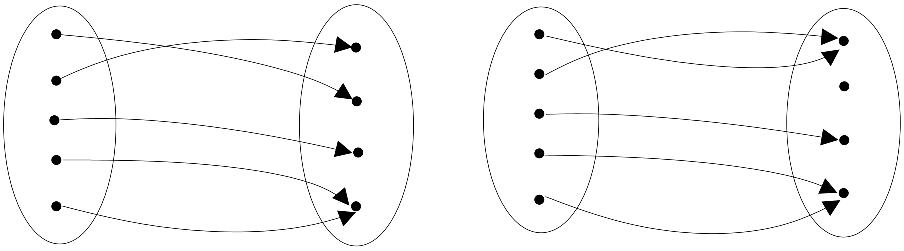
IV.4.3 – Définition (Fonction *surjective* (ou *surjection*))

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est ***surjective*** (ou que c'est une ***surjection***) si tout élément de F possède ***au moins*** un antécédent par f. Autrement dit chaque élément de F est atteint ***au moins*** une fois par la fonction. En langage mathématiques cela s'écrit :

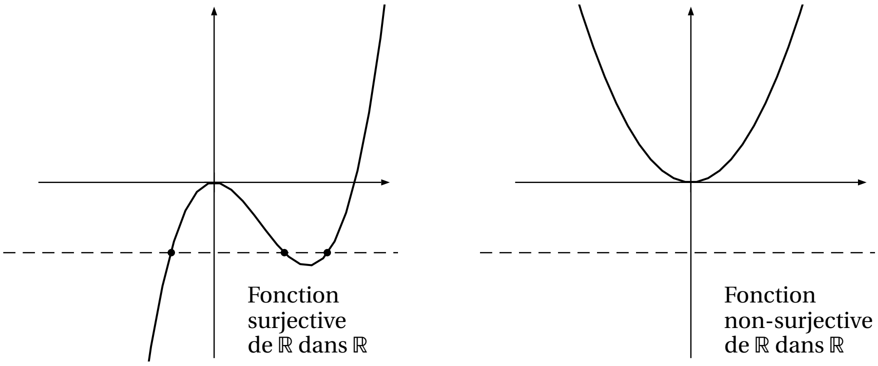
$$\forall y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{E},\ y = f(x)$$

Remarques

1 ▶ Si E et F sont des ensembles finis, cela signifie graphiquement que chaque élément de F est atteint au moins par une flèche.



2 ▶ Si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$, cela signifie graphiquement que toutes les droites horizontales dont l'ordonnée est dans F coupent la courbe au moins une fois.



3 ▶ On peut toujours transformer une fonction non-surjective en une fonction surjective en modifiant l'espace d'arrivée. Il suffit en effet de limiter l'espace d'arrivée aux valeurs effectivement atteintes par la fonction. Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective si l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ mais elle le devient si l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}_+$.

4 ▶ Si une fonction est continue, il est possible de justifier sa surjectivité à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires (attention de bien donner tous les détails).

IV.4.4 – Proposition (Lien entre injectivité, surjectivité et bijectivité)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction. On a toujours l'équivalence suivante :

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow \big(f \text{ est injective}\big) \text{ ET } \big(f \text{ est surjective}\big)$$

Remarque – Pour démontrer qu'une fonction est bijective, il est assez fréquent (surtout en algèbre) de démontrer séparément qu'elle est injective et surjective.

Exercice F.6

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : (x, y) \longmapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$;
2. $g : (x, y) \longmapsto (1, x - y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$;
3. $h : (x, y) \longmapsto (2x + y, 3x - 2y)$.

Exercice F.7

Soit E, F et G trois ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux fonctions.

1. Si f et g sont injectives, montrer que leur composée $g \circ f$ l'est aussi.
2. Si f et g sont surjectives, montrer que leur composée $g \circ f$ l'est aussi.
3. Si f et g sont bijectives, montrer que leur composée $g \circ f$ l'est aussi. Exprimer dans ce cas la réciproque de $g \circ f$ en fonction des réciproques de f et de g.

IV.5 - Relations binaires sur un ensemble

IV.5.1 – Définition (relation binaire sur un ensemble)

Soit E un ensemble. On appelle relation binaire sur E toute application $\mathscr{R} : \mathrm{E}^2 \to \{0,1\}$.

Remarques

1 ▶ Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. On dit que x *est en relation avec* y *au sens de* $\mathscr{R}$ si $\mathscr{R}(x,y) = 1$.

2 ▶ On écrira de manière équivalente : « $\mathscr{R}(x,y) = 1$ » ou « $x \mathrel{\mathscr{R}} y$ » ou encore « $x \mathrel{\mathscr{R}} y$ est vrai ».

3 ▶ Attention, cette définition n'est pas symétrique car les couples (x,y) et (y,x) sont différents. Ainsi, il est possible que la relation $x \mathrel{\mathscr{R}} y$ soit vraie sans que $y \mathrel{\mathscr{R}} x$ le soit.

Vous connaissez déjà un grand nombre de relations binaires sur un ensemble.

Exemples

1 ▶ La relation d'égalité $=$ sur un ensemble E ;

2 ▶ les relations d'ordre $\leqslant$ et $<$ sur $\mathbb{R}$ (mais aussi leurs cousines $\geqslant$ et $>$) ;

3 ▶ la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$;

4 ▶ la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$a \mid b \overset{\text{déf}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z},\ b = ka$$

5 ▶ la relation de congruence modulo un réel α définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \equiv y\ [\alpha] \overset{\text{déf}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\alpha$$

IV.5.2 – Définition (Propriétés éventuelles d'une relation binaire)

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur l'ensemble E.

- On dit que $\mathscr{R}$ est *réflexive* si : $\forall x \in \mathrm{E},\ x \mathrel{\mathscr{R}} x$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est *transitive* si : $\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^3,\ \big(x \mathrel{\mathscr{R}} y \text{ ET } y \mathrel{\mathscr{R}} z\big) \Longrightarrow x \mathrel{\mathscr{R}} z$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est *symétrique* si : $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ x \mathrel{\mathscr{R}} y \Longleftrightarrow y \mathrel{\mathscr{R}} x$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est *antisymétrique* si : $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \big(x \mathrel{\mathscr{R}} y \text{ ET } y \mathrel{\mathscr{R}} x\big) \Longrightarrow x = y$.

IV.5.3 – Définition (Relation d'ordre)

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

Exemples

1 ▶ La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est évidemment une *relation d'ordre* :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a bien $x \leqslant x$;
- pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a bien $\big(x \leqslant y \text{ ET } y \leqslant z\big) \Longrightarrow x \leqslant z$;
- pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a bien $\big(x \leqslant y \text{ ET } y \leqslant x\big) \Longrightarrow x = y$.

2 ▶ La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est une relation d'ordre (la démonstration est laissée au lecteur).

Nous reviendrons en détails sur la notion de relation d'ordre dans un chapitre ultérieur.

IV.5.4 – Définition (Relation d'équivalence)

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence* si elle est réflexive, transitive et symétrique.

Exemples

1 ▶ La relation d'égalité $=$ sur un ensemble E est évidemment une relation d'équivalence.

2 ▶ La relation de congruence modulo un réel α est une relation d'équivalence :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a bien $x \equiv x\ [\alpha]$ car $x = x + 0 \cdot \alpha$;
- pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si l'on suppose que $x \equiv y\ [\alpha]$ et $y \equiv z\ [\alpha]$ alors par définition il existe $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = y + k\alpha$ et $y = z + l\alpha$ ce qui donne $x = (z + l\alpha) + k\alpha = z + (k + l)\alpha$ et prouve que $x \equiv z\ [\alpha]$;
- pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on suppose que $x \equiv y\ [\alpha]$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = y + k\alpha$ ce qui donne $y = x + (-k)\alpha$ et prouve que $y \equiv x\ [\alpha]$.

3 ▶ Si l'on note V l'ensemble de tous les élèves et étudiants du lycée Vauvenargues, la relation $\circledast$ définie sur V par :

$$\mathrm{X} \circledast \mathrm{Y} \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \text{« X et Y sont dans la même classe. »}$$

est une relation d'équivalence.

IV.5.5 – Définition (Classe d'équivalence)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence notée $\sim$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$ on appelle classe d'équivalence de x (pour la relation $\sim$) l'ensemble $\mathrm{C}(x)$ des éléments de E qui sont en relation avec x :

$$\mathrm{C}(x) = \left\{ y \in \mathrm{E},\ x \sim y \right\}$$

Remarques

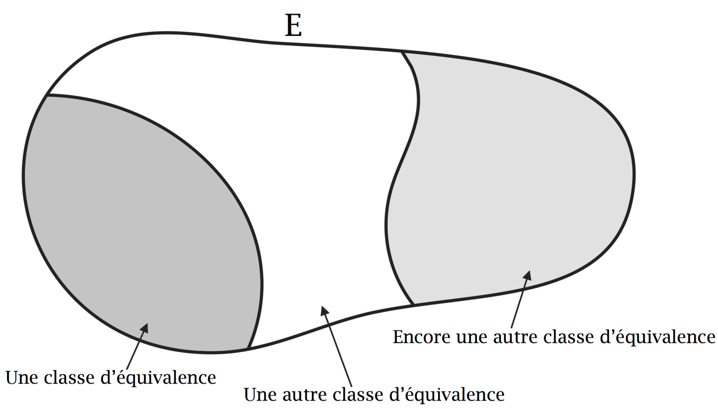
1 ▶ Par définition, une classe d'équivalence est toujours non vide : la classe de x contient au moins x puisque $x \sim x$.

2 ▶ Deux classes d'équivalences sont soit *disjointes* (*i.e.* d'intersection vide) soit égales.
Résultat admis.

3 ▶ Les classes d'équivalences pour $\sim$ forment une *partition* de E ce qui signifie que :

- elles sont non vides (voir remarque **1**) ;
- elles sont égales ou disjointes (voir remarque **2**) ;
- leur réunion est E tout entier.

Résultat admis.



Exemples

1 ▶ La classe d'équivalence d'un réel x pour la relation de congruence modulo 2π est l'ensemble :
$$\begin{aligned} C(x) &= \{y \in \mathbb{R},\ y \equiv x\ [2\pi]\} \\ &= \{y \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ y = x + 2k\pi\} \\ &= \{x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$
Compte tenu de la dernière écriture obtenue, on note souvent cet ensemble $x + 2\pi\mathbb{Z}$.

2 ▶ Reprenons l'exemple de la classe d'équivalence $\circledast$ définie sur l'ensemble V des élèves et étudiants du lycée Vauvenargues. Pour tout $X \in V$, la classe d'équivalence de X est tout simplement la classe (au sens usuel du terme) à laquelle l'élève ou étudiant appartient. Le fait que l'ensemble des classes forment une partition de l'ensemble V des élèves ou étudiants du lycée est alors une évidence :

- les classes sont non vides;
- deux classes sont soit égales soit disjointes (aucun élève n'est dans deux classes différentes)
- la réunion de toutes les classes est l'ensemble V tout entier.

V - D'autres modes de raisonnement

V.1 - Inclusion d'ensembles

Méthode F.5

Soit E et F deux ensembles.

- **Inclusion**
  Pour montrer que $E \subset F$, on considère un élément quelconque de E, **on lui donne un nom** (sinon comment le manipuler !?) et on démontre qu'il appartient à F.
- **Non inclusion**
  Pour démontrer que $E \not\subset F$ il suffit de trouver un élément $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin F$.
- **Égalité**
  Pour démontrer que $E = F$, le plus souvent on démontre séparément $E \subset F$ et $F \subset E$ (raisonnement par **double inclusion**).

Exercice F.8

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ on note $\mathscr{D}(a, b)$ l'ensemble des diviseurs communs de a et de b. Si a et b sont deux entiers naturels tels que $0 < b < a$, démontrer (par double inclusion) que $\mathscr{D}(a, b) = \mathscr{D}(a, a - b)$.

Exercice F.9

Soit E et F deux ensembles fixés, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2$.

1. Démontrer que : $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.
2. Démontrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Démontrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4. Donner un exemple pour lequel l'inclusion de la question précédente est stricte (*i.e.* n'est pas une égalité).

Exercice F.10

Soit E et F deux ensembles fixés, $f : E \to F$ et $(A, B) \in \left(\mathscr{P}(F)\right)^2$.

1. Démontrer que : $A \subset B \implies f^{\leftarrow}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. Démontrer que : $f^{\leftarrow}(A \cup B) = f^{\leftarrow}(A) \cup f^{\leftarrow}(B)$.
3. Démontrer que : $f^{\leftarrow}(A \cap B) = f^{\leftarrow}(A) \cap f^{\leftarrow}(B)$.

ATTENTION

Bien se souvenir que nous avons introduit, **par précaution**, la notation $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$ en appelant cet ensemble le tiré en arrière de B par f.
Mais la notation classique est $f^{-1}(\mathrm{B})$ et cet ensemble s'appelle image réciproque de B par f.
La problème de la notation classique est qu'elle peut laisser penser que f est bijective ce qui absolument pas garantie.

V.2 - Égalité entre deux fonctions

Par définition deux fonctions f et g sont égales si :

- elles ont le même ensemble de départ (que l'on notera E) ;
- elles ont le même ensemble d'arrivée (que l'on notera F) ;
- elles « coïncident » en tout point de E *i.e.* : $\forall x \in \mathrm{E},\ f(x) = g(x)$

En pratique, pour montrer que deux fonctions f et g sont égales, on considère donc un élément quelconque de E, **on lui donne un nom**, par exemple x, et on démontre (par un calcul ou un raisonnement qui dépend du contexte) que $f(x) = g(x)$. Bien entendu, on peut être ammener à calculer $f(x)$ et $g(x)$ **séparément** pour démontrer cette égalité.

V.3 - Analyse et synthèse

Méthode F.6

Résoudre un problème (par exemple une équation) par ***analyse et synthèse*** consiste à :

- trouver des conditions ***nécessaires*** concernant les solutions ***éventuelles*** de ce problème (**analyse**) ;
- étudier si ces conditions sont ***suffisantes*** pour avoir une solution (**synthèse**).

L'étape de synthèse est fondamentale car parmi les solutions ***potentielles*** il peut y en avoir qui ne le sont pas (l'auteur les appelle « ***fausses solutions*** »).

Exercice F.11

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{2x-5}$.

Indication – *Ne vous occuper de « l'ensemble de résolution » et faite simplement un raisonnement du type :*
• si x est solution (analyse) alors on constate que x fait nécessairement partie d'une liste de solution potentielle ;
• puis (synhèse) faites une vérification pour chaque solution potentielle.

Exercice F.12

1. En raisonnant par analyse et synthèse, démontrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire, de manière unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Que donne le cas particulier de la fonction exponentielle ?

V.4 - Disjonction de cas

Méthode F.7

Pour résoudre un problème (par exemple une équation) on peut être amené à distinguer différents cas. Dans une telle situation il faudra alors :

- faire attention que tous les cas soient traités (*i.e.* que l'on « oublie personne ») ;
- faire la synthèse finale pour regrouper les différents résultats.

Exercice F.13

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+1| = x^2$.

Solution

B6

Exercice F.14

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal rechercher l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $\left|x\right| + \left|y\right| < 4$.

V.5 - Utilisation de contre-exemples

On rappelle que le contraire d'un énoncé de la forme $A =$ « $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » est :

$$« \ \exists x_0 \in E,\ \left(\text{NON } \mathscr{P}(x_0)\right) »$$

Méthode F.8

Pour prouver qu'un énoncé de la forme $A =$ « $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » est faux, il ***suffit*** de trouver un élément $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{P}(x_0)$ soit faux.

Exercice F.15

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$ n'est ni paire, ni impaire.

Solution

B7

ATTENTION

Devant le problème précédent on pourrait avoir envie d'écrire $f(-x)$ et se contenter de constater que l'on obtient ni $f(x)$ ni $-f(x)$. Mais cela n'est ***pas correct***.

Le problème de ce type de raisonnement est son manque de rigueur, lié à l'absence de quantificateurs.

Que prouve, en effet, le fait que $f(-x)$ produit une *formule différente* de $f(x)$?

Cela prouve-t-il que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout x ? Assurément non car deux fonctions différente peuvent bien avoir une valeur commune (par exemple $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$).

Cela prouve-t-il que $f(-x) \neq f(x)$ pour au moins une valeur de x ? Non plus car deux formules en apparence différentes peuvent cacher des résultats identique (penser simplement à $\cos^2(x)$ d'une part et $1-\sin^2(x)$ d'autre part : il s'agit bien de deux *formules* différentes mais leur *résultats* sont identiques).

VI - Exercice complémentaire : un célèbre raisonnement par l'absurde

Exercice F.16 (L'ensemble des nombres premiers est infini (Euclide))

1. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des nombres premiers. Montrer que le nombre $1 + p_1 \times \cdots \times p_k$ n'est divisible par aucun des nombres p_i $(i \in [\![1, k]\!])$.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel et d le plus petit diviseur de n tel que $d \geqslant 2$. Démontrer que d est premier.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Fin du chapitre