Les devoirs à la maison ont pour objet de vous entrainer. Il sont évalués par une simple lettre A, B, C, D (ou E). Ils n'entrent dans le calcul de la moyenne semestrielle que de manière réduite, en tant que bonus ou malus.

Divers raisonnements par analyse et synthèse

Exercice 1

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x+y) = f(x) \times f(y) \quad \text{(E)}$$

La relation (E) ci dessus est appelée ***équation fonctionnelle***.

1. Analyse Si f vérifie la relation (E), en dérivant par rapport à y puis en donnant une valeur particulière à y, démontrer que f vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f'(x) = a f(x) \quad \text{(F)}$$

(où a est une constante réelle que l'on explicitera en fonction de f).

2. Synthèse Résoudre l'équation différentielle (F). Parmi les solutions de (F), lesquelles sont solutions de (E) ? Conclure.

Exercice 2

Quelques rappels pour commencer.

- La ***transposée*** d'une matrice ***carrée*** $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice M^T définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \left(\mathrm{M}^\mathrm{T}\right)_{i,j} \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{M}\right)_{j,i}$$

- La matrice ***carrée*** $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***symétrique*** si $\mathrm{M}^\mathrm{T} = \mathrm{M}$. Cela revient à dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \left(\mathrm{M}\right)_{j,i} = \left(\mathrm{M}\right)_{i,j}$$

- La matrice ***carrée*** $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***anti-symétrique*** si $\mathrm{M}^\mathrm{T} = -\mathrm{M}$. Cela revient à dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \left(\mathrm{M}\right)_{j,i} = -\left(\mathrm{M}\right)_{i,j}$$

  En particulier cela impose aux coefficients diagonaux d'être nuls :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \ \left(\mathrm{M}\right)_{i,i} = 0$$

- **Exemples –** Les matrices P et Q suivantes sont respectivement symétriques et antisymétriques :

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \\ 7 & -5 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Le but de cet exercice est de démontrer que toute matrice carrée peut se décomposer de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Quelques notations – Pour toute matrice carrée M on note :

$$\sigma(\mathrm{M}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\mathrm{T}}}{2}$$
$$\tau(\mathrm{M}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{M}-\mathrm{M}^{\mathrm{T}}}{2}$$

1. **Analyse**
   Si M est une matrice carrée s'écrivant $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$ avec S symétrique et A antisymétrique démontrer que l'on a nécessairement $\mathrm{S} = \sigma(\mathrm{M})$ et $\mathrm{A} = \tau(\mathrm{M})$.
2. **Synthèse**
   Si M est une matrice carrée quelconque, vérifier que :
   (i) $\sigma(\mathrm{M})$ est symétrique ;
   (ii) $\tau(\mathrm{M})$ est anti-symétrique ;
   (iii) $\mathrm{M} = \sigma(\mathrm{M}) + \tau(\mathrm{M})$
   Conclure.
3. **Mise en pratique sur un exemple**
   Déterminer l'unique décomposition « *symétrique* + *anti-symétrique* » de la matrice suivante :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 10 \\ 4 & 2 & 12 & 4 \\ 8 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 14 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

⋆ *Fin de l'énoncé* ⋆