Consignes

Les consignes de présentations sont habituelles : marge supplémentaire à droite, séparation entre les questions et encadrements des résultats.
Il est rappelé que l'écriture des mathématiques consiste incidemment à **faire des phrases** dans lesquelles apparaissent, il est vrai, des symboles et formules. Mais un texte mathématiques ne peut en aucun cas se limiter à un empilement de formules et calculs.
Le travail sur un devoir à la maison peut naturellement être fait à plusieurs. En tout cas en ce qui concerne la recherche et la compréhension du sujet. Mais la rédaction doit être personnelle.

Exercice

Quelques rappels pour commencer.

- La ***transposée*** d'une matrice ***carrée*** $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice M^{T} définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right)_{i,j} \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{M})_{j,i}$$

- La matrice ***carrée*** $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***symétrique*** si $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}$. Cela revient à dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\mathrm{M})_{j,i} = (\mathrm{M})_{i,j}$$

- La matrice ***carrée*** $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***anti-symétrique*** si $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{M}$. Cela revient à dire que :

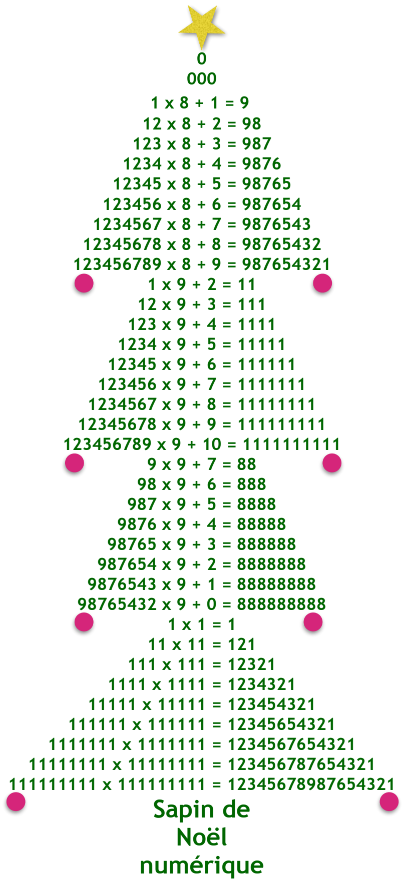
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\mathrm{M})_{j,i} = -(\mathrm{M})_{i,j}$$

  En particulier cela impose aux coefficients diagonaux d'être nuls :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ (\mathrm{M})_{i,i} = 0$$

- **Exemples –** Les matrices P et Q suivantes sont respectivement symétriques et antisymétriques :

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \\ 7 & -5 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$



Le but de cet exercice est de démontrer que toute matrice carrée peut se décomposer de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Quelques notations – Pour toute matrice carrée M on note :

$$\sigma(\mathrm{M}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{M} + \mathrm{M}^{\mathrm{T}}}{2}$$

$$\tau(\mathrm{M}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{M} - \mathrm{M}^{\mathrm{T}}}{2}$$

1. Analyse

Si M est une matrice carrée s'écrivant $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$ avec S symétrique et A antisymétrique démontrer que l'on a nécessairement $\mathrm{S} = \sigma(\mathrm{M})$ et $\mathrm{A} = \tau(\mathrm{M})$.

2. **Synthèse**

   Si M est une matrice carrée quelconque, vérifier que :

   (i) $\sigma(\mathrm{M})$ est symétrique ;

   (ii) $\tau(\mathrm{M})$ est anti-symétrique ;

   (iii) $\mathrm{M} = \sigma(\mathrm{M}) + \tau(\mathrm{M})$

   Conclure.

3. **Mise en pratique sur un exemple**

   Déterminer l'unique décomposition « *symétrique* + *anti-symétrique* » de la matrice suivante :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 10 \\ 4 & 2 & 12 & 4 \\ 8 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 14 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Fin de l'énoncé