Lemme :

Soient $f : I \longrightarrow J$ une fonction continue et strictement monotone entre les intervalles I et J de $\mathbb{R}$.
(C'est donc une bijection de I dans J).
Si f est impaire alors sa réciproque f^{-1} l'est aussi.

Démonstration de ce lemme :

a) Premier point (que l'on aurait tendance à oublier), la fonction f étant impaire, son ensemble de départ I est symétrique par rapport à 0. Il nous faut commencer par démontrer que J l'est aussi. Plusieurs méthodes :

- géométriquement en utilisant la symétrie entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$;
- de manière plus élémentaire, par « calcul ».

Utilisons la deuxième méthode.

À dém : $\forall y \in J, \ -y \in J$

Soit $y \in J$ quelconque (mais désormais fixé). Par bijectivité, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
Comme I est symétrique par rapport à 0, le réel $-x$ appartient à l'intervalle I. Et donc $f(-x) = -f(x) = -y \in J$.
Ainsi J est bien symétrique par rapport à 0. $\square$

b) Deuxième point

<u>À dém</u> : $\forall y \in J,\quad f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$

Pour démontrer que les nombres réels $a = f^{-1}(-y)$ et $b = -f^{-1}(y)$ sont égaux, calculons leurs images par f :

$$f(a) = f\left(f^{-1}(-y)\right) = f\circ f^{-1}(-y) = -y$$

$$f(b) = f\left(-f^{-1}(y)\right) \underset{\text{car } f \text{ est impaire}}{=} -f\left(f^{-1}(y)\right) = -f\circ f^{-1}(y) = -y$$

Ainsi, les nombres a et b ont la même image par f (dit autrement, ce sont deux antécédents de $-y$). Par bijectivité de f, cela impose $a = b$. ■