Consignes

Aucun document, ni aucun appareil électronique.

Comme d'habitude : attention à la présentation, faire des phrases, marge supplémentaire à gauche, séparation franche entre toutes les questions, numérotation exhaustive de vos pages.

Problème - Éude de la fonction tangente hyperbolique et de sa réciproque

Nous allons définir et étudier dans ce problème une nouvelle fonction usuelle. Il s'agit de la fonction *tangente hyperbolique* notée th et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{th}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Partie I - Étude de la fonction th

1. Étudier l'éventuelle parité de la fonction th.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$\text{th}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad \text{ainsi que} \qquad \text{th}(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
3. **Question de cours -** Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.
4. Calculer la dérivée de la fonction th et vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$$
5. En déduire le tableau de variation de th en précisant valeur(s) particulière(s) et limites aux bornes.
6. Justifier le fait que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.
7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\text{th}}$ de la fonction th au point d'abscisse 0.
8. Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_{\text{th}}$ par rapport à sa tangente en 0, ainsi que par rapport à ses éventuelles asymptotes.
9. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_{\text{th}}$.

Partie II- Quelques formules de trigonométrie hyperbolique

10. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ démontrer que : $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$.
11. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ démontrer que : $\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\,\text{sh}(y)$.
12. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ démontrer que :
$$\text{th}(x+y) = \frac{\text{th}(x)+\text{th}(y)}{1+\text{th}(x)\,\text{th}(y)} \qquad (\star)$$

Remarque - *Nous étudierons l'ensemble des fonctions dérivables vérifiant l'identité* $(\star)$ *dans le DM n° 1.*

Partie III - Réciproque de la fonction th

La fonction th réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ dans J, elle possède une bijection réciproque. Cette réciproque est notée Argth : $\text{J} \to \mathbb{R}$.

13. Donner, sans aucun calcul, l'allure de la courbe de la fonction Argth en la superposant à celle de la fonction th.
14. À l'aide du théorème de dérivation d'une fonction réciproque, justifier la dérivabilité de Argth et calculer sa dérivée (sur un ensemble que l'on précisera).

✦ *Fin de l'énoncé* ✦