Lycée Vauvenargues
PTSI-1
2018/2019

Devoir surveillé de Mathématiques n° 1
Vendredi 28 septembre
Durée : 2 heures

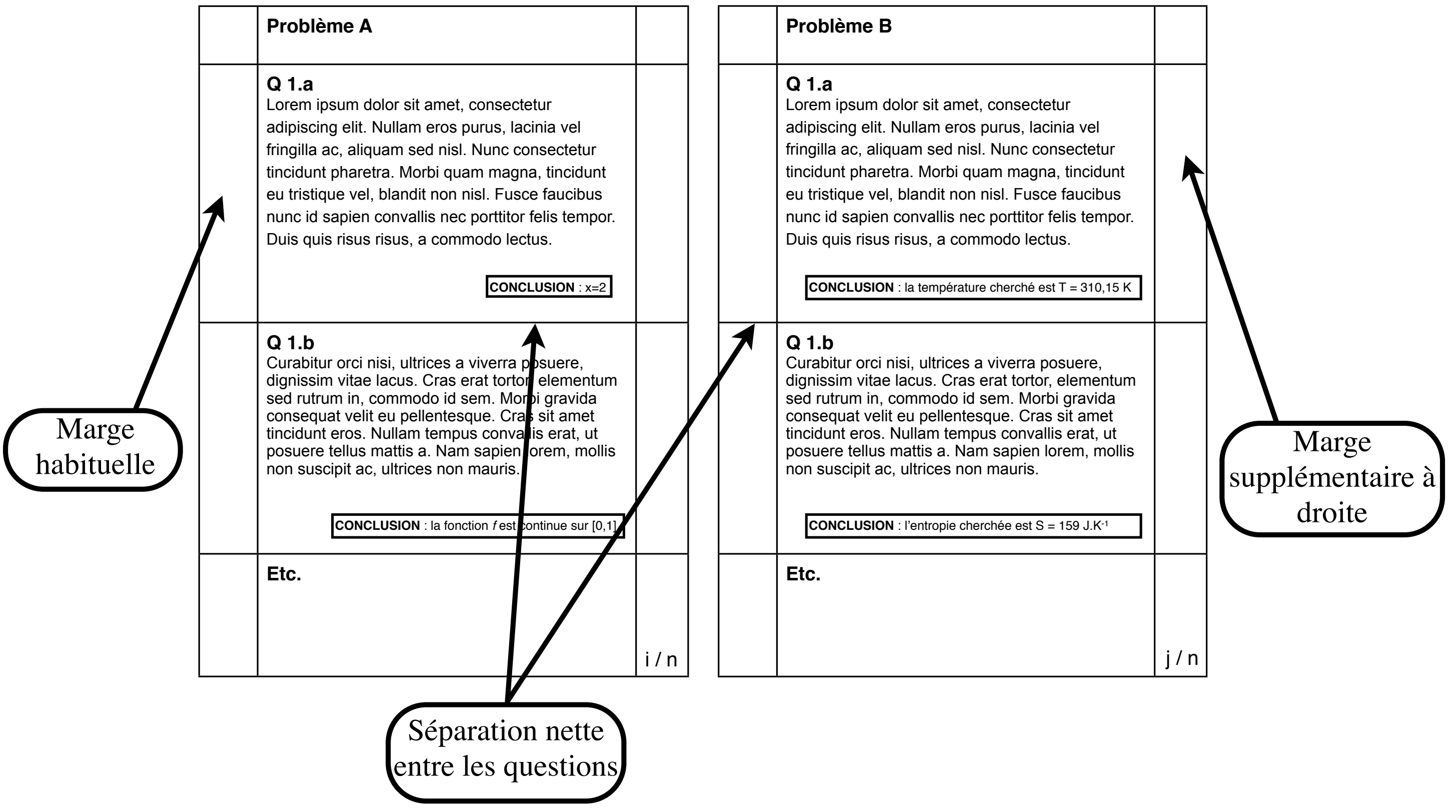
Si, au cours de l'épreuve, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au surveillant, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les étudiants sont invités à **encadrer** les résultats de leurs calculs ou raisonnements.

Par ailleurs, il est demandé **explicitement** aux étudiants :

- d'ajouter une **marge supplémentaire** de 3 cm sur la droite de leurs copies ;
- de **tirer un trait horizontal** sur **toute la largeur** de la page entre **TOUTES** les questions ;
- de **numéroter de manière exhaustive** toutes les copies et intercalaires.



Exercice 1

1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}, \quad \frac{1-2x}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^i(1-2i)}{i(i+1)}$$

Exercice 2

1. Factoriser (sur $\mathbb{R}$) l'expression polynomiale suivante : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x - 12$.

2. Effectuer la division euclidienne de $Q(x) = 6x^3 + 9x^2 + x - 1$ par $2x+1$.
Que remarque-t-on ?

Problème 1

Le but de ce problème est de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme suivante :

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{1}{i+1} \binom{n-1}{i}$$

1. Calculer A_n pour tout $n \in [\![1,4]\!]$.

2. En déduire une ***conjecture*** de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque – *On ne la démontre pas tout de suite.*

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0, n-1]\!]$:

a) Calculer (simplifier) l'expression suivante : $\dfrac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n}{i+1}}$

b) En déduire une expression de $\dfrac{1}{i+1}\dbinom{n-1}{i}$ en fonction de $\dbinom{n}{i+1}$.

4. Démontrer la conjecture.

Problème 2

Pour tout $(p,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = 1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p + n^p$$

1. Rappeler la valeur de $S_1(n)$. Démontrer cette formule.

2. Pour tout $(p, n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, justifier l'égalité :

$$\mathrm{S}_{p+1}(n+1) = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^{p+1}$$

3. En développant $(i+1)^{p+1}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, puis en intervertissant les deux sommes, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geqslant 2$:

$$(n+1)^{p+1} \ = \ (n+1) \ + \ \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} \mathrm{S}_k(n) \ + \ (p+1)\mathrm{S}_p(n)$$

4. ***a)*** En utilisant la formule de la question **3**, déterminer une expression factorisée de $\mathrm{S}_2(n)$.
Remarque – *Normalement, vous devriez retrouvez une formule connue.*

b) Faire ensuite de même pour $\mathrm{S}_3(n)$.

c) Faire à nouveau de même pour $\mathrm{S}_4(n)$.
Attention – *Question calculatoire ! Pour la factorisation à la fin du calcul, il apparaît une expression polynomiale de degré* 2*, que l'on pourrait factoriser car son discriminant est strictement positif, mais il n'est pas demandé de le faire (les racines ne sont pas très « jolies »).*

⋆ *Fin de l'énoncé* ⋆