Devoir surveillé n°3, jeudi 20 décembre 2018

Durée : 2 heures

Le sujet comporte 4 exercices. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les étudiants sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs ou raisonnements.

Exercice n°1 Equations trigonométriques

1. Enoncer le cas d'égalité de deux cosinus, puis le cas d'égalité de deux sinus.
2. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$(E_1) \ : \ \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1).

3. (a) Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

   (b) On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$(E_2) \ : \ \cos(4x) + \cos(9x) + \cos(14x) = 0$$

   Déterminer l'ensemble des solutions de (E_2).

Exercice n°2 Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

1. Rappeler la définition **PUIS** expliciter les racines 5-ième de l'unité.
2. Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$

3. Déterminer la valeur de la somme des racines 5-ième de l'unité.
4. En déduire la valeur de $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
5. Montrer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
6. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Tournez la page ⟶

Exercice n°3 Etude de lieux géométriques

Les questions de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante

On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{C} - \{-1\}$ par

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

1. Déterminer la forme algébrique de $f(2i)$, la forme exponentielle de $f\left(i\sqrt{3}\right)$ et la forme algébrique de $f(j)$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points $M(z)$ du plan complexe dont l'affixe z vérifie $f(z) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points $M(z)$ du plan complexe dont l'affixe z vérifie $f(z) \in \mathbb{U}$.
4. On considère $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ et } z \neq -1\}$.
   (a) Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Montrer que $f(z) = i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
   (b) En déduire une description géométrique de l'image de $f(\mathcal{C})$ dans la plan complexe.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z
$$(f(z))^6 = 1$$
   Vous donnerez les solutions sous forme **algébrique**.

Exercice n°4 Résolution d'une équation de degré trois à coefficients complexes

La question 2. *de cet exercice peut être traitée indépendamment de la question* 1.

On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

L'objectif de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante

$$(E) : z^3 + (6-6i)z + 2 + 6i = 0.$$

1. On considère $z_0 \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation (E). Soient $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\begin{cases} u + v = z_0 \\ uv = -2 + 2i \end{cases}$
   (a) Exprimer la quantité $(u+v)^3$ de deux manières différentes.
   (b) En déduire les valeurs de $u^3 + v^3$ et u^3v^3.
   (c) Montrer que u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation de degré deux $Z^2 + (2+6i)Z + (16+16i) = 0$.
   (d) Déterminer les valeurs de u^3 et v^3 (*On pourra utiliser le fait que* $10816 = 2^6 \times 13^2$).
2. On considère les nombres complexes $\omega_1 = -8i$ et $\omega_2 = -2 + 2i$.
   (a) Déterminer les racines 3-ième du nombre complexe ω_1, puis les écrire sous forme algébrique.
   (b) Reprendre la question précédente pour ω_2.
3. En utilisant les résultats obtenus aux questions 1. et 2., déterminer les valeurs possibles pour u,v et z_0.
4. En déduire les solutions de (E).