La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les étudiants sont invités à **encadrer** les résultats de leurs calculs ou raisonnements.

L'usage de calculatrices est interdit.

Par ailleurs, il est demandé **explicitement** aux étudiants :

- d'ajouter une **marge supplémentaire** de 3 cm sur la droite de leurs copies;
- de **tirer un trait horizontal** sur **toute la largeur** de la page entre **TOUTES** les questions;
- de **numéroter de manière exhaustive** toutes les copies et intercalaires.

Les trois problèmes sont à rendre sur trois copies séparées.

Problème A – Exemples de décomposition LU

NB – *Dans tout ce problème les matrices sont à coefficients réels.*

I – Préliminaires

1. ***a)*** Rappeler la définition de la transposée d'une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Rappeler la définition d'une matrice symétrique, puis l'écrire en langage purement mathématique en faisant intervenir les coefficients de la matrice.

2. Soit p, q, m, et n des entiers naturels strictement positifs. Si $\mathrm{A} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ et $\mathrm{B} = \left[b_{i,j}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ sont deux matrices à coefficients réels,

a) À quelle condition sur p, q, m et n le produit AB est-il bien défini ?

b) Quelle est alors la taille de la matrice AB ?

c) Si on note $c_{i,j}$ le coefficient générique de la matrice AB, donner son expression en fonction des coefficients de A et B.

II – Déterminant d'une matrice carrée (d'ordre 2 ou 3)

3. À toute matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est associé sont ***déterminant*** qui est le nombre défini par :

$$\det(\mathrm{A}) \overset{\text{déf}}{=} ad - bc$$

Démontrer que A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Remarque – En cas d'inversibilité, on ne demande pas d'exprimer A^{-1}. Mais suivant la méthode choisie l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c et d peut apparaître.

4. À toute matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{bmatrix}$$

est associé sont ***déterminant*** qui est le nombre défini par :

$$\det(\mathrm{A}) \overset{\text{déf}}{=} avz + bwx + cuy - cvx - awy - buz$$

On ***admet***, dans toute la suite, que A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

a) La matrice suivante est-elle inversible (on ne cherchera pas à l'inverser) ?

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

b) On s'intéresse à la matrice $\mathrm{B}(t)$ dépendante d'un paramètre réel t suivante :

$$\mathrm{B}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & t \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Résoudre les équations d'inconnue t suivantes :

$$(\mathrm{E}_1) : \ \det\big(\mathrm{B}(t)\big) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{E}_0) : \ \det\big(\mathrm{B}(t)\big) = 0$$

III – Un premier exemple

Dans cette partie, on considère les matrices :

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Calculer les déterminants de L et A.

6. Justifier que les matrices L et A sont inversibles. Calculer l'inverse de L.

7. Déterminer une matrice U triangulaire supérieure telle que $\mathrm{A} = \mathrm{LU}$.

IV – Propriété d'une décomposition LU pour les matrices carrée d'ordre n

Soit L, U et $\mathrm{A} = \mathrm{LU}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, de coefficients respectifs, $\ell_{i,j}$, $u_{i,j}$ et $a_{i,j}$.

8. À quelle condition sur les coefficients $\ell_{i,j}$ la matrice L est-elle triangulaire inférieure ? À quelle condition sur les coefficients $u_{i,j}$ la matrice U est-elle triangulaire supérieure ?

9. Nous supposerons dorénavant que U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure.
Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, montrer que l'on a :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{i,k} u_{k,j} \qquad [\star]$$

V – Un deuxième exemple

10. On considère, jusqu'à la fin de cette partie, la matrice d'ordre 3 suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que A est inversible (on ne cherchera pas à l'inverser).

11. On cherche maintenant deux matrices L et U telles que $\mathrm{A} = \mathrm{LU}$ vérifiant de plus les propriétés suivantes :

— d'une part, U est triangulaire supérieure ;

— d'autre part, L est triangulaire inférieure et ne contient que des 1 sur sa diagonale.

a) En utilisant la formule $[\star]$ pour $a_{1,1}$, calculer $u_{1,1}$.

b) En exprimant ensuite $a_{i,1}$, calculer $\ell_{i,1}$ pour tout $i \leqslant 3$.

c) En exprimant $a_{1,2}$, calculer $u_{1,2}$.

d) En exprimant $a_{2,2}$ calculer $u_{2,2}$.

e) En exprimant $a_{3,2}$ calculer $\ell_{3,2}$.

f) En raisonnant de manière analogue, déterminer les coefficients restants.

g) Conclure en écrivant les matrices L et U de manière complète. Puis, vérifier que $\mathrm{LU} = \mathrm{A}$: on explicitera le calcul des trois coefficients de la deuxième ligne de LU.

Problème B – Similitudes directes dans le plan

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan et l'on suppose fixé un repère orthonormal de sens direct. Cela permet une correspondance entre les points du plan et les nombres complexes (chaque point ayant une affixe).

I – Introduction

Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ on s'intéresse à l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = az + b$

1. Si $a = 0$ que peut-on dire de f ? Est-elle « intéressante » ?

$\star$ **Dans toute la suite on suppose que $a \neq 0$.** $\star$

2. Démontrer que f est bijective et préciser sa réciproque.

Ainsi, pour $a \neq 0$, l'application f est la représentation complexe d'une ***transformation*** du plan $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ que l'on qualifie de ***similitude directe*** (nous verrons pourquoi ce vocabulaire dans la suite).

II – Exemples déjà connus

3. En choisissant judicieusement (a, b), vérifier que la translation de vecteur $\overrightarrow{w}(\alpha)$ est une similitude directe.

4. En choisissant judicieusement (a, b), vérifier que la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est une similitude directe.

5. En choisissant judicieusement (a, b), vérifier que l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est une similitude directe.

III – Interprétation géométrique dans le cas général

6. Que dire de la transformation F si $a = 1$?

7. On suppose que $a \neq 1$.

a) Montrer que f (et donc F) possède un unique point fixe ω (c'est-à-dire un nombre complexe solution de $f(z) = z$). On exprimera celui-ci en fonction de a et b.

On note Ω le point d'affixe ω.
On écrit la nombre a sous forme trigonométrique : $a = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Si $M(z)$ est un point quelconque du plan et que $M''(z'')$ est l'image de M par F, démontrer que :

$$z'' = \omega + \rho e^{i\theta}(z - \omega)$$

c) Si on note $R = R(\Omega, \theta)$ la rotation de centre Ω et d'angle θ et $H = H(\Omega, \rho)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport ρ, démontrer que :

$$F(M) = H \circ R(M) = R \circ H(M)$$

En déduire que F est la composée (commutative) de R et de H.

Conclusion de la partie III - Une similitude directe est soit une translation soit la composée commutative d'une rotation et d'une homothétie de même centre.

IV – Pourquoi « similitude directe »

8. Soit F une similitude directe représentée en complexe par $f : z \mapsto az + b$ ($a \neq 0$). On veut démontrer que F préserve les ***angles orientés*** et les ***proportions*** (c'est-à-dire les rapports de longueurs). Précisément, soit $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ et $M_4(z_4)$ quatre points du plan tels que $M_1 \neq M_2$ et $M_3 \neq M_4$. On note $M'_1(z'_1)$, $M'_2(z'_2)$, $M'_3(z'_3)$ et $M'_4(z'_4)$ les images des quatre points par F.
Démontrer que :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M'_1M'_2}, \overrightarrow{M'_3M'_4}\right) \quad [2\pi] \\ \text{ET} \\ \dfrac{M_3M_4}{M_1M_2} = \dfrac{M'_3M'_4}{M'_1M'_2} \end{cases}$$

Remarque 1 - La conservation dans angles orientés et des proportions fait que la « forme » des figures est préservée par application de la transformation F.

Remarque 2 - En revanche la taille des figures n'est pas nécessairement préservée (typiquement pour une homothétie qui agrandit ou réduit les longueurs).

9. Étudions un exemple en prenant la transformation $F : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ dont la représentation complexe est :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(1 - i) \end{array}$$

a) Identifier géométriquement la transformation F.

b) On considère le triangle MPQ où les points M, P et Q ont pour affixes respectives $m = 4$, $p = 6 - \dfrac{i}{2}$ et $q = 5 + 4i$. Quelle est la nature du triangle MPQ (justifier bien sûr votre réponse) ?

c) Tracer sur une même figure le triangle MPQ et le triangle $M'P'Q'$ image de MPQ par la transformation F (unité graphique 1 cm). Papier petits carreaux **OBLIGATOIRE** !

Précision 1 - Vous choisirez une « fenêtre graphique » pour laquelle $x \in [-5, 11]$ et $y \in [-5, 12]$.

Précision 2 - Pour réaliser votre figure vous choisirez l'une des deux méthodes suivantes (en le précisant) :

(i) Soit faire une construction utilisant des valeurs approchées des coordonnées, et même si cela n'est pas très satisfaisant on se contentera de l'approximation $\sqrt{3} \simeq 1,7$. Avec cette méthode vous indiquerez (en plus du dessin) les valeurs approchées de toutes les coordonnées utilisées.

(ii) Soit faire une figure *théoriquement* exacte par construction « à la règle et au compas » (mais légèrement fausse en *pratique* car réalisée par un être humain). Dans ce cas vous laisserez apparents (en léger) les traits de construction.

d) Vérifier (par exemple par un calcul) que le triangle $\mathrm{M'P'Q'}$ est de même nature que MPQ.

Problème C – *Un système différentiel linéaire*

On s'intéresse dans ce problème au ***système différentiel linéaire*** (S) suivant :

$$(\mathrm{S}): \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 7y(t) - 5z(t) \\ z'(t) = 10y(t) - 8z(t) \end{cases}$$

Pour être plus précis on s'intéresse aux éventuelles fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant les trois égalités précédentes.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\mathrm{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Montrer que le système (S) est équivalant à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t)$$

où A est une matrice que l'on précisera.

2. On considère la matrice suivante :

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vérifier que P est inversible et calculer son inverse.

3. Calculer la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Que constate-t-on ?

4. On propose de faire le changement d'inconnue suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(t) \\ \mathrm{X}(t) = \mathrm{PY}(t) \end{cases}$$

Montrer que la condition :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t)$$

est équivalente à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{BY}(t)$$

5. En posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

démontrer que le systéme différentiel (S) (d'inconnues x, y et z) est équivalent à un système différentiel (S′) (d'inconnues u, v et w) et constater que le nouveau système (S′) est beaucoup plus simple que le système (S).

6. Résoudre (S′), c'est à dire trouver toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant les 3 équations du systèmes (S′).

7. En déduire toutes les solutions du système d'origine (S).

8. Démontrer que le système (S) possède une unique solution vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

et expliciter celle-ci.

Fin de l'énoncé