■ Consignes

Aucun document, ni aucun appareil électronique.

Comme d'habitude – Attention à la présentation, faire des phrases, penser à préciser les liens logiques (si, donc, alors, ainsi, car, comme, de manière équivalente, si et seulement si, *etc.*), marge supplémentaire à gauche, séparation franche entre toutes les questions, mise en valeur des résultats, numérotation exhaustive de vos pages.

Attention – Quelques points dans le barème seront attribués (ou pas!) en fonction de la présentation (aspect plutôt esthétique) et de la rigueur des raisonements et notations (ce qui est bien plus important évidemment). À ce moment de l'année, il est temps d'écrire les mathématiques de manière véritablement correcte.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants et il est demandé de les rédiger sur deux copies séparées.

■ Problème A – *Suites mutuellement récurrentes*

On considère dans ce problème 3 suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 2 \\ c_0 = 3 \end{cases}$$

et les relations de récurences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = 4a_n + b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = -a_n + \dfrac{3}{2}c_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\mathrm{X}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} sous la forme AX_n, où A est une matrice que l'on précisera.

2. Donner une expression générale de X_n en fonction de A et X_0.

3. On considère la matrice suivante :

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer, par la méthode de votre choix, l'inverse de P (la faisabilité du calcul prouvant l'inversibilité de P).

4. Montrer (en donnant soigneusement tous les détails nécessaires) que A s'écrit sous la forme PDP^{-1}, où D est une matrice que l'on précisera.

5. En donnant, à nouveau, tous les détails nécessaires, donner une expression de A^n en fonction de D^n.

6. En déduire l'expression explicite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de la matrice A^n en fonction uniquement de l'entier n.

7. En déduire les expressions explicites, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

8. Étudier les éventuelles limites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ Problème B – *Un système différentiel linéaire*

On s'intéresse dans ce problème au *système différentiel linéaire* (S) suivant :

$$\cancel{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - y(t) \\ z'(t) = -9x(t) + 7y(t) - 3z(t) \end{cases}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 7y(t) - 5z(t) \\ z'(t) = 10y(t) - 8z(t) \end{cases}$$

Erreur dans la saisie de l'énoncé.
La notation prendra cela en compte
pour ne pénaliser personne.

Pour être plus précis on s'intéresse aux éventuelles fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant les 3 égalités précédentes.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Montrer que le système (S) est équivalant à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)$$

où A est une matrice que l'on précisera.

2. On considère les deux matrices suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Vérifier que P et Q sont inverses l'une de l'autre.

3. Calculer la matrice $B = P^{-1}AP$. Que constate-t-on ?

4. On propose de faire le changement d'inconnue suivant

$$\begin{cases} Y(t) = P^{-1}X(t) \\ X(t) = PY(t) \end{cases}$$

Montrer que la condition :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)$$

est équivalente à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = BY(t)$$

5. En posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

démontrer que le systéme différentiel (S) (d'inconnues x, y et z) et équivalent à un système différentiel (S′) (d'inconnues u, v et w) et constater que le nouveau système (S′) est beaucoup plus simple que le système (S).

6. Résoudre (S′), c'est à dire trouver toutes les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant les 3 équations du systèmes (S′).

7. En déduire toutes les solutions du système d'origine (S).

8. Démontrer que le système (S) possède une unique solution vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

et expliciter celle-ci.

✦ *Fin de l'énoncé* ✦