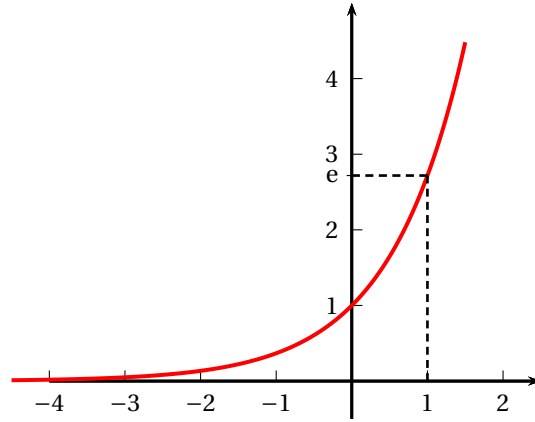


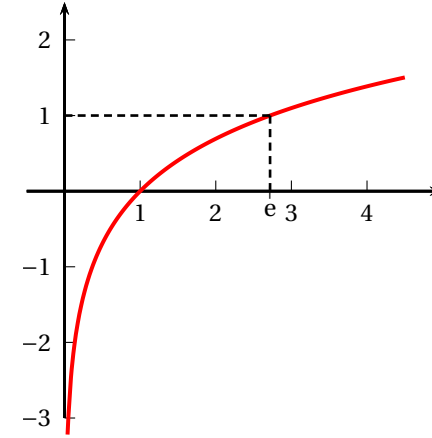
## Fonction exponentielle



### Propriétés

- exp est définie, continue, et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
  - exp est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$ .
  - Pour tous réels  $x$  et  $y$  on a  $e^{x+y} = e^x e^y$ ,  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  et  $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ .
  - Pour tout réel  $x$  et tout entier relatif  $k$  on a  $(e^x)^k = e^{kx}$ .
  - exp est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp'(x) = \exp(x)$ .
  - exp est l'unique solution de l'équation différentielle  $f' = f$  vérifiant la condition initiale  $f(0) = 1$ .
  - Approximation affine au voisinage de 0 :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .
  - Croissances comparées :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ .
  - Plus généralement, pour tout entier naturel  $n$  on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ .
- Autrement dit au voisinage de  $\pm\infty$  l'exponentielle « l'emporte » sur toute puissance de  $x$ .

## Fonction logarithme népérien



### Propriétés

- ln est définie, continue, et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
  - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
  - ln est une bijection de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.  
Pour tout réel  $x$  on a donc  $\ln(e^x) = x$  et pour tout réel  $y$  strictement positif  $e^{\ln(y)} = y$ .
  - Pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs on a  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ ,  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$  et  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ .
  - Pour tout réel  $x$  strictement positif et tout entier relatif  $k$  on a  $\ln(x^k) = k \ln(x)$ .
  - ln est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .
  - Approximation affine au voisinage de 0 :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ .
  - Croissances comparées :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ .
  - Plus généralement : pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$ .
- Autrement dit au voisinage de  $+\infty$  et de 0 les puissances de  $x$  « l'emportent » sur  $\ln(x)$ .