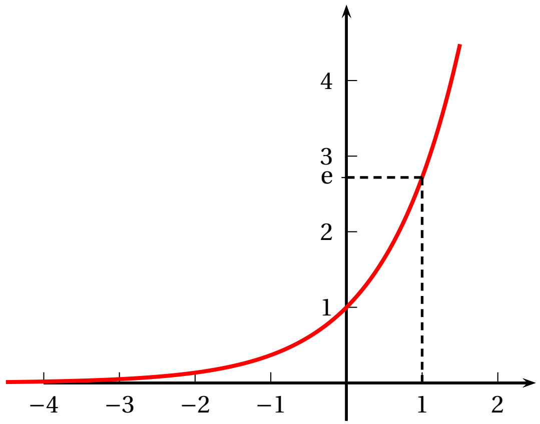
Fonction exponentielle

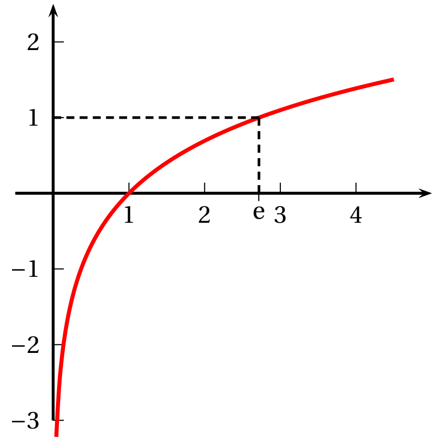


Propriétés

- exp est définie, continue, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$.
- Pour tous réels x et y on a $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$.
- Pour tout réel x et tout entier relatif k on a $(\mathrm{e}^x)^k = \mathrm{e}^{kx}$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- exp est l'unique solution de l'équation différentielle $f' = f$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.
- Approximation affine au voisinage de 0 : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
- Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.
- Plus généralement, pour tout entier naturel n on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$.

  Autrement dit au voisinage de $\pm\infty$ l'exponentielle « l'emporte » sur toute puissance de x.

Fonction logarithme népérien



Propriétés

- ln est définie, continue, et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- ln est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.
  Pour tout réel x on a donc $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ et pour tout réel y strictement positif $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$.
- Pour tous réels x et y strictement positifs on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- Pour tout réel x strictement positif et tout entier relatif k on a $\ln(x^k) = k\ln(x)$.
- ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Approximation affine au voisinage de 0 : $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.
- Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.
- Plus généralement : pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln(x) = 0$.

  Autrement dit au voisinage de $+\infty$ et de 0 les puissances de x « l'emportent » sur $\ln(x)$.