

► Formules élémentaires (à savoir visualiser sur le cercle trigonométrique)

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \cos(x + \pi) &= -\cos(x) & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

► Formules d'addition

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad \cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \text{(A2)} \quad \cos(a - b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \text{(A3)} \quad \sin(a + b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \text{(A4)} \quad \sin(a - b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{aligned}$$

$$\text{(A5)} \quad \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad (\text{lorsque cela a un sens})$$

$$\text{(A6)} \quad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)} \quad (\text{lorsque cela a un sens})$$

► Formules de linéarisation (transformation de produits en sommes)

$$\text{(L1)} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\text{(L2)} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\text{(L3)} \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

► Transformation de sommes en produits

$$\text{(T1)} \quad \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{(T2)} \quad \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{(T3)} \quad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{(T4)} \quad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

► Formules de duplication (passage à l'angle double ou à l'angle moitié)

$$\text{(D1)} \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\text{(D2)} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\text{(D3)} \quad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \quad (\text{lorsque cela a un sens})$$

$$\text{(D4)} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\text{(D5)} \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

► Expression de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Si x est un réel et si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini, alors on a :

$$\text{(E1)} \quad \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\text{(E2)} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\text{(E3)} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

En d'autres termes, pour tout réel t on a :

$$\cos(2\text{Arctan}(t)) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin(2\text{Arctan}(t)) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan(2\text{Arctan}(t)) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

► Formules d'Euler et Moivre

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

► Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

► Équations trigonométriques

$$\cos(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \cos(x) = \cos(x_0) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, x = x_0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, x = -x_0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi \quad \sin(x) = \sin(x_0) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, x = x_0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi - x_0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\tan(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi \quad \tan(x) = \tan(x_0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = x_0 + k\pi$$

► Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	