Mathématiques

Formulaire

Trigonométrie

Classe préparatoire PTSI-1

Lycée Vauvenargues

2018/2019

Formules élémentaires (à savoir visualiser sur le cercle trigonométrique)

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ $\quad$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ $\quad$ $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ $\quad$ $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$ $\quad$ $\sin(\pi-x) = \sin(x)$

Formules d'addition

(A1) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(A2) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

(A3) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

(A4) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

(A5) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ *(lorsque cela a un sens)*

(A6) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ *(lorsque cela a un sens)*

Formules de linéarisation (transformation de produits en sommes)

(L1) $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

(L2) $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

(L3) $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$

Transformation de sommes en produits

(T1) $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(T2) $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(T3) $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(T4) $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Formules de duplication (passage à l'angle double ou à l'angle moitié)

(D1) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(D2) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

(D3) $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ *(lorsque cela a un sens)*

(D4) $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

(D5) $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Expression de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Si x est un réel et si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini, alors on a :

(E1) $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(E2) $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

(E3) $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

En d'autres termes, pour tout réel t on a :

$\cos\left(2\,\text{Arctan}\,(t)\right) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad$ $\sin\left(2\,\text{Arctan}\,(t)\right) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\quad$ $\tan\left(2\,\text{Arctan}\,(t)\right) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Formules d'Euler et Moivre

$\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\quad$ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

$\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ $\quad$ $\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$

$1+e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ $\quad$ $1-e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

Équations trigonométriques

$\cos(x) = 0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2}+k\pi$ $\quad$ $\cos(x) = \cos(x_0) \iff \begin{cases} \exists k\in\mathbb{Z}, x = x_0+2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k\in\mathbb{Z}, x = -x_0+2k\pi \end{cases}$

$\sin(x) = 0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}, x = k\pi$ $\quad$ $\sin(x) = \sin(x_0) \iff \begin{cases} \exists k\in\mathbb{Z}, x = x_0+2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k\in\mathbb{Z}, x = \pi-x_0+2k\pi \end{cases}$

$\tan(x) = 0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}, x = k\pi$ $\quad$ $\tan(x) = \tan(x_0) \iff \exists k\in\mathbb{Z}, x = x_0+k\pi$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	