Rappel – *Cours non su implique une note strictement inférieure à 10.*

Objectifs et savoir-faire

Chapitre C – Fonctions usuelles : consolidations des acquis

- Maîtriser toutes les notions « élémentaires » relatives aux fonctions : image d'un élément de l'ensemble de départ, antécédent(s) d'un élément de l'ensemble d'arrivée, restriction, notation $\mathcal{F}(E,F) = F^E$, graphe d'une fonction (représentation graphique dans le cas d'une fonction réelle de la variable réelle).
- Savoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction donnée, par exemple, par une formule.
- Maîtriser la notion (et l'écriture en langage mathématique) d'image d'une partie de l'ensemble de départ. Si $f : E \to F$ et $A \subset E$ il s'agit de $f(A)$.
- **Attention –** Au lieu de parler d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée avec la très dangereuse notation $f^{-1}(B)$, nous avons parler du **« tiré en arrière »** de B par f noté $f^{\leftarrow}(B)$.
Nous conserverons ce vocabulaire et cette notation un certain temps, pour éviter les confusions.
- Connaître la définition et maitriser l'écriture en langage mathématiques des opérations sur les fonctions : opérations algébriques et (pseudo-nouveauté) **composition**.
- Savoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction composée.
- Savoir écrire en langage mathématique et être capable d'exploiter les propriétés éventuelles d'une fonction réelle de la variable réelle : parité, périodicité, monotonie, notion de fonction majorée, minorée, bornée (et donc de majorant et minorant), notion de maximum et de minimum.
- Savoir démontrer sans aucune hésitation et en écrivant d'une manière mathématiquement irréprochable des propriétés élémentaires telles que : la somme de deux fonctions croissantes est croissante, la composée de deux fonctions croissantes est croissante, la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante, *etc.*
- Connaître la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point et l'interprétation géométrique de cette propriété.
- Savoir utiliser la définition de la dérivabilité pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point et calculer la valeur éventuelle du nombre dérivé en ce point.
- Connaître sans hésitation l'équation cartésienne de la tangente en un point (en cas de dérivabilité) et savoir la justifier très rapidement.
- Maîtriser les règles de dérivation (opérations algébriques et composition).
- Savoir obtenir une formule générale des dérivées successives d'une fonction par la méthode « calculs explicites des premières dérivées, conjecture, puis validation par récurrence » (étant entendu que cette méthode peut ne pas aboutir suivant les cas).
- Savoir dériver une fonction à valeurs complexes, soit directement (avec les règles de calculs usuelles), soit en dérivant séparément partie réelle et imaginaire.
Savoir exploiter le fait que le résultat est le même (par exemple : passer en complexe pour simplifier un calcul).
NB - *Le chapitre sur les nombres complexes n'ayant pas encore été traité, nous n'avons pas encore mis en pratique la méthode précédente de « passage en complexes ».*
- Savoir exploiter le lien entre (stricte) monotonie est le signe d'une dérivée.
- Connaître et savoir mettre en œuvre le plan général d'étude d'une fonction.
- Connaître et savoir mettre en œuvre la méthode usuelle pour rechercher une éventuelle asymptote oblique.
- Connaître et savoir exploiter toutes les propriétés usuelles (vue en cours) des fonctions suivantes : fonctions puissances (exposant entier relatif seulement pour l'instant), racine carrée, valeur absolue, fonctions polynomiales, fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynomiales), fonction exponentielle, logarithme népérien, sinus, cosinus et tangente.
Attention - *Un formulaire de trigonométrie a été distribué mais pas étudié : seules les formules vraiment élémentaires sont à connaitre pour l'instant.*
- Savoir mettre en œuvre les différentes méthodes classiques pour étudier l'existence éventuelle d'une limite. En particulier (liste non exhaustive) :
– utiliser les ***limites usuelles*** déjà rencontrées : croissances comparées (4 limites), d'autres limites à connaître pour ln et exp (3 limites), quelques limites à connaître concernant les fonctions trigonométrique (3 limites) ;
– procéder à des ***transformations d'expressions*** (ex. : ajouter/retrancher ou multiplier/diviser) pour se ramener à des limites connues ;
– procéder à un ***changement de variable*** ;
– faire apparaître (en transformant éventuellement l'expression) le ***taux d'accroissement*** d'une fonction dont on connait la dérivée ;
– dans le cas (certes très particulier) où apparait des racines carrés, penser à multiplier et diviser par l'***expression conjuguée*** ;
– mettre en facteurs les termes « prépondérants » (le terme n'a pas encore été défini de manière rigoureuse) ;
– *etc.*

Chapitre D – Fonctions usuelles : approfondissements et nouveautés

- Connaître la notion d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, et comprendre les ***abus de notations*** qui sont faits pour les présenter (suppression du quantificateur universel, suppression de la variable). Cela conduit à une notation du type : $(E)\quad y' + ay = b$.
- Connaître sans hésitation la forme générale des solutions de l'équation homogène $(E_0)\quad y' + ay = 0$.
- Comprendre le lien entre les solutions de l'équation complète (E) et celle de (E_0) (une solution particulière de (E) étant connue).
- Savoir expliciter une solution particulière de (E). Cela est particulièrement simple dans le cas où $a \neq 0$ car dans ce cas on peut trouver ue solution particulière constante.
- Connaître sans hésitation la forme générale des solutions de l'équation complète $(E)\quad y' + ay = b$ (dans le cas où $a \neq 0$).
- Savoir exploiter la donnée d'une condition initiale pour calculer la constante apparaissant dans la solution générale de (E).
- Être capable de s'adapter aux différentes notations pour désigner la dérivée, notamment celle(s) utilisée(s) en Physique.

Questions de cours exigibles (énoncé précis et démonstration)

Q6. Définition de la dérivabilité d'une fonction en un point. Puis étude détaillée de la dérivabilité de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Q7. Fonctions puissances $x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
– Sans démonstration : ensemble de définition, dérivée, variations et allure de la courbe (plusieurs cas).
– Avec démonstration : valeur de la dérivée dans le cas où $n \geqslant 1$.

Q8. Croissance comparées $\big($de x, $\ln(x)$ et $e^x\big)$: énoncés des quatre limites usuelles, démonstration pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Q9. Étude des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}}$.

N.B. – *La « démonstration » (pour la première limite) a été faite par utilisation d'un taux d'accroissement. Il est clair que cela constitue une* ***arnaque mathématique*** *car la dérivabilité des fonctions trigonométriques n'a pas été démontrée préalablement, et que justement, une des méthodes pour le faire consiste à d'abord étudier la limite de* $\sin(x)/x$ *en* 0 *(par exemple par des considérations géométriques).*

Q10. Résolution d'une équation différentielle linéaire **homogène** (ou sans second membre) d'ordre 1 **à coefficients constants**.

Remarque – *Les EDL$_1$ à coefficients constants sont très rapidement utiles en physique. Les autres types d'équations différentielles seront traités plus tard.*