■ Objectifs et savoir-faire

Chapitre C – Fonctions usuelles : consolidations des acquis

*Reprise **intégrale** des objectifs et savoir faire détaillés dans les programmes de colle précédent.*

Chapitre D – Fonctions usuelles : approfondissements et nouveautés

Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- Connaître la notion d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, et comprendre les ***abus de notations*** qui sont faits pour les présenter (suppression du quantificateur universel, suppression de la variable). Cela conduit à une notation du type : $(\mathrm{E})\ \ y' + ay = b$.
- Connaître sans hésitation la forme générale des solutions de l'équation homogène $(\mathrm{E}_0)\ \ y' + ay = 0$.
- Comprendre le lien entre les solutions de l'équation complète (E) et celle de (E_0) (une solution particulière de (E) étant connue).
- Savoir expliciter une solution particulière de (E). Cela est particulièrement simple dans le cas où $a \neq 0$ car dans ce cas on peut trouver ue solution particulière constante.
- Connaître sans hésitation la forme générale des solutions de l'équation complète $(\mathrm{E})\ \ y' + ay = b$ (dans le cas où $a \neq 0$).
- Savoir exploiter la donnée d'une condition initiale pour calculer la constante apparaissant dans la solution générale de (E).
- Être capable de s'adapter aux différentes notations pour désigner la dérivée, notamment celle(s) utilisée(s) en Physique.

Notion de bijection et de fonctions réciproques

- Maîtriser la notion de bijectivité de différentes manières : à l'aide d'une phrase en langage naturel utilisant le mot « antécédent », à l'aide d'une courbe pour une fonction réelle de la variable réelle, à l'aide de schéma « à flèches » pour des fonctions entre ensembles finis et **bien sûr** savoir écrire la bijectivité en langage mathématique.
- Connaître et savoir exploiter la définition de la réciproque d'une bijection.
- Connaître la définition de l'application identité Id_{X} d'en ensemble quelconque X.
- Connaître et savoir exploiter les propriétés d'une bijection réciproque f^{-1} quand on la compose (dans les deux sens) avec la fonction directe f.
- **Connaître PARFAITEMENT** et savoir savoir exploiter la caractérisation de la bijectivité d'une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ par l'existence d'une application g telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ (fonction g qui est dans ce cas nécessairement la réciproque de f).
- Connaître et savoir exploiter le fait que la réciproque de la réciproque d'une bijection f est la fonction f elle-même.

Cas des fonctions continues sur un intervalle, puis des fonctions continues et STRICTEMENT MONOTONES sur un intervalle

- Connaître la définition de la continuité en un point et sur un intervalle de $\mathbb{R}$ d'une fonction et son interprétation (intuitive) en terme de tracé de la courbe représentative dans le cas d'une fonction à valeur réelle.
- **Maîtriser DE MANIÈRE ABSOLUMENT PARFAITE** le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), qui peut s'énoncer de différentes manières, mais dans lequel il n'y a **ABSOLUMENT PAS** d'hypothèse de monotonie et de conclusion en terme d'unicité.
- **Maîtriser DE MANIÈRE ABSOLUMENT PARFAITE** le corollaire du TVI dans le cas particulier d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.
- **Maîtriser DE MANIÈRE ABSOLUMENT PARFAITE** le « théorème de la bijection », possédant trois hypothèses et trois conclusions.
- Ne **SURTOUT** pas confondre les trois théorèmes suivant : TVI, son corollaire dans le cas strictement monotone et le théorème de la bijection.
- Dans le cas d'une bijection f réelle de la variable réelle, connaître et savoir exploiter la symétrie qui existe entre le graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction « directe » et le graphe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque.
- Connaître avec une précision **ABSOLUE** le théorème de dérivabilité d'une réciproque (dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle).
  Important – Ne pas oublier qu'en cas de dérivabilité en x_0 avec $f'(x_0) = 0$, la fonction f^{-1} n'est **pas dérivable** en $y_0 = f(x_0)$ **MAIS QUE L'ON DISPOSE MALGRÉ TOUT** d'une information géométrique : la présence d'une (demi)-**tangente verticale** en y_0 pour la courbe de la fonction f^{-1}.
- Savoir appliquer ce théorème pour justifier le dérivabilité ou la non-dérivabilité d'une fonction réciproque et pour éventuellement calculer la dérivée de la fonction réciproque.

De nouvelles notions et de nouvelles fonctions usuelles, provenant des fonctions exponentielle et logarithme népérien

- Connaître la définition de a^b (« a puissance b) pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et être capable d'expliquer pourquoi cette notation et ce vocabulaire de « puissance « est légitime.
- Maîtriser les différentes règles de calcul relatives à cette nouvelle notion de puissance et être capable de les démontrer en revenant à la définition.
- Connaître l'existence et les propriétés élémentaires des fonctions logarithmes en base 10 (noté log ou $\log_{10}$) et en base 2 (noté $\log_2$). Comprendre leur intérêt dans un contexte numérique et dans les sciences expérimentales (Physique-Chimie, SI).
- Être capable de faire l'étude d'une fonction dont l'expression contient la variable en exposant (en particulier, savoir dériver une telle fonction).
- Connaître **DE MANIÈRE ABSOLUMENT IRRÉPROCHABLE** la définition des fonctions puissances avec exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ **non nécessairement entier**.
- Maîtriser **DE MANIÈRE ABSOLUMENT PARFAITE** les propriétés des fonctions puissances avec exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ **non nécessairement entier** (dérivabilité, dérivée, monotonie, limites aux bornes de l'ensemble de définition, allure de la courbe suivant les cas.)
- Se souvenir **AVEC PRÉCISION** que la fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha$ peut se « prolonger par continuité » en 0 de manière naturelle dans le cas où $\alpha \geqslant 0$.
- Connaître et savoir exploiter les « croissances comparées générali-

sées », qui diffèrent des quatre « croissances comparées usuelles » par la présence d'exposants strictement positifs.

- Connaître la définition et les propriétés élémentaires des fonctions cosinus et sinus hyperbolique (parité, dérivée, variations, limites, allure des courbes).

Remarque – *La seule formule de trigonométrie hyperbolique à connaître officiellement est* $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$. *Mais il est fortement recommandé de savoir retrouver par un simple calcul les formules d'additions dont la première :* $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$.

Fonctions circulaires (ou trigonométriques) réciproques

- Connaître la définition et les propriétés élémentaires de la fonctions Arcsin (imparité, continuité, dérivabilité ou non-dérivabilité suivant les points, dérivée, variations, valeurs particulières, allure de le courbe).
- En particulier, savoir parfaitement quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ et de sa réciproque Arcsin.
- Connaître la définition et les propriétés élémentaires de la fonctions Arccos (continuité, dérivabilité ou non-dérivabilité suivant les points, dérivée, variations, valeurs particulières, allure de le courbe).
- En particulier, savoir parfaitement quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $\cos_{|[0,\pi]}$ et de sa réciproque Arccos.
- Connaître la définition et les propriétés élémentaires de la fonctions Arctan (imparité, continuité, dérivabilité ou non-dérivabilité suivant les points, dérivée, variations, valeurs particulières, allure de le courbe).
- En particulier, savoir parfaitement quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ et de sa réciproque Arctan.
- Savoir calculer des valeurs particulières des fonctions Arcsin, Arccos et Arctan.
- Savoir étudier des fonctions composées contenant Arcsin, Arccos ou Arctan
- Savoir résoudre des équations (simples) contenant les fonctions Arcsin, Arccos ou Arctan.
- Être capable d'étudier l'éventuelle limite d'une fonction composée contenant Arcsin, Arccos ou Arctan.

Exercices à savoir refaire car corrigés en classe

Tous les exercices du chapitres C.

Pour le chapitre D, uniquement les exercices suivant : D.1 à D.8
Attention – ***Aucun*** *exercice n'a été corrigé concernant les fonctions* Arcsin, Arccos *et* Arctan *(on attendra la semaine prochaine).*

Formulaires à connaître

- fonctions expentielle et logarithme népérien ;
- trigonométrie ;
- dérivées usuelles.

Questions de cours exigibles (énoncé précis et démonstration)

Q7. Fonctions puissances $x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
(a) Sans démonstration : ensemble de définition, dérivée, variations et allure de la courbe (plusieurs cas).
(b) Avec démonstration : valeur de la dérivée dans le cas où $n \geqslant 1$.

Q8. Croissance comparées $\big($de x, $\ln(x)$ et $e^x\big)$: énoncés des quatre limites usuelles, démonstration pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Q9. Caractérisation de la bijectivité d'une application $f : X \to Y$ par l'existence d'une application g telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ (fonction g qui est dans ce cas nécessairement la réciproque de f). [Théorème **D.II.1.5**]

Q10. Définition et propriétés de la fonction Arcsin. [Théorème **D.IV.1.1** et **D.IV.1.2**]