Objectifs et savoir-faire

Chapitre G – Nombres complexes et trigonométrie

*Reprise **intégrale** des objectifs et savoir faire détaillés dans les programmes de colle précédent.*

À cela s'ajoute :

Résolution d'équations

- Savoir que tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées opposées.
- Calculer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme exponentielle.
- Calculer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique, par adjonction de « l'équation aux modules ».
- Savoir et comprendre pourquoi la notation $\sqrt{\ }$ n'est **PAS** utilisée dans $\mathbb{C}$.
- Connaître la définition des racines n-ièmes de l'unité ($n \in \mathbb{N}^*$) dont l'ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.
- Descxription précise des racinces n-ièmes de l'unité (il y en a n) $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.
- Savoir démontrer et exploiter le fait que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle pour $n \geqslant 2$.
- Déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$ en utilisant une racine particulière et les racinces n-ièmes de l'unité.
- Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels dont le discriminant est négatif (dans ce cas les racinces sont conjuguées).
- Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients complexes (ce qui demande de faire le calcul des racines carrées du discriminant).
- Connaître et exploiter le lien entre les coefficients et les racines d'une équation polynomiale de degré 2.

Application à la géométrie plane élémentaire

- Représenter un point ou un vecteur pou son affixe.
- Interpréter le module comme une distance.
- Interpréter les arguments comme des mesures d'angles (modulo 2π).
- Configuration de 4 points : connaître et savoir redémontrer l'interpration du module et arguments d'un quotient de la forme $\dfrac{d-c}{b-a}$.
- Caractériser la parallélisme de deux droites (AB) et (CD) à l'aide des affixes a, b, c et d de 4 points.
- Caractériser l'alignement de 3 points à l'aide de leurs affixes.
- Caractériser l'orthogonalité de deux droites (AB) et (CD) à l'aide des affixes a, b, c et d de 4 points.
- Paramétrisation d'un cercle : $z = \omega + r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Transformation du plan

- Savoir définir une transformation du plan $\mathscr{P}$ comme une bijection de $\mathscr{P}$ dans lui-même.
- Se souvenir des notions d'applications injectives, surjectives et de la réciproque d'une bijection.
- Représentation d'une transformation $\mathrm{F} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ par une bijection $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
- Connaître la définition d'une translation et être capable de donner sa représentation complexe.
- Connaître très précisémment la définition d'une rotation du plan et connaître sa représentation complexe.
- Connaître très précisémment la définition d'une homothétie du plan et connaître sa représentation complexe.
- Connaître la transformation du plan associée à la conjugaison.
- Être capable, pour des exemples simples, ou avec des indications de reconnaître une transformation dont on connaît la représentation complexe. ***Le cas général est hors programme.***

Exercices à savoir refaire

Exercices corrigés en classe : G.1 à G.3 et G.5 à G.13
Exercices avec un corrigé disponible en ligne : G.4, G.6 et G.14
Attention – Aucun exercice d'application à la géométrie plane n'a été corrigé en classe.

Formulaires à connaître

Trigonométrie !

Questions de cours exigibles (énoncé précis et démonstration)

Q15. **Première inégalité triangulaire** : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Q16. Somme de deux fonctions trigonométriques de même pulsation.
- ***a)*** **Théorème –** Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \ \ a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \mathrm{A}\cos(\omega t - \varphi)$.
- ***b)*** **Application numérique –** Pour $f : t \to 2\sqrt{3}\cos(5t) + 2\sin(5t)$.

Q17. Recherche des racines carrées dans $\mathbb{C}$ du nombre $\omega = 1 + i$.
- ***a)*** Sous forme trigonométrique (ou exponentielle).
- ***b)*** Sous forme algébrique (avec l'ajout de « l'équation aux modules »).

Q18. Description précise des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$.
- ***a)*** Définition des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
- ***b)*** Les nombres complexes de la forme $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont des racines n-ièmes de l'unité.
- ***c)*** Les racines n-ièmes de l'unité $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont deux à deux différentes.
- ***d)*** Un nombre complexe est une racine n-ième de l'unité si et seulement s'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Q19. Configuration de 4 points : interprétation du module et arguments d'un quotient de la forme $\dfrac{d-c}{b-a}$.