Objectifs et savoir-faire

Chapitre I – Calcul matriciel
*Reprise **intégrale** des objectifs et savoir faire détaillés dans les programmes de colle précédent.*

À cela s'ajoute :

Compléments à propos du rang d'une matrice

Les savoirs et savoir faire figurant ci-après sont traditionnellement énoncés au second semestre une fois mise en place la théorie des espaces vectoriels et des applications linéaires. Mais il est possible de les énoncer dès maintenant en ayant en tête que :

- *les résultats sont à connaître et nous en aurons besoin ;*
- *sauf mention contraire, les démonstrations sont non exigibles (et même parfois hors programme).*

- Connaître la définition du rang rg(A) d'une matrice A comme le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée et réduite par lignes R qui est équivalente par lignes à A.
- Comprendre et savoir utiliser le fait qu'une forme échelonnée (non nécessairement réduite) suffit pour déterminer le rang d'une matrice.
- Savoir et savoir exploiter le fait que deux matrices équivalentes par lignes ont le même rang.
- Savoir et savoir exploiter le fait que le rang d'une matrice A reste inchangé quand on applique à A des opérations élémentaires sur les ***lignes*** de A.
- Savoir et savoir utiliser le fait que le rang d'une matrice est inchangé lorsqu'on la multiplie, à droite ou à gauche, par une matrice inversible.
- Savoir et savoir exploiter le fait que le rang d'une matrice A reste inchangé quand on applique à A des opérations élémentaires sur les ***colonnes*** de A.
- Bien que hors programme, connaître le théorème affirmant qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si il existe deux matrices inversibles $E \in GL_n(\mathbb{K})$ et $F \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que :
$$EAF = J_r \overset{\text{déf}}{=} \left[\begin{array}{c|c} I_r & [0]_{r,p-r} \\ \hline [0]_{n-r,r} & [0]_{n-r,p-r} \end{array}\right]$$
- Savoir, comprendre et savoir utiliser le fait que dans le théorème précédent, on peut ajouter la condition selon laquelle E et F sont des produits de matrices élémentaires.
- Savoir et utiliser le fait qu'une matrice A et sa transposée A^T ont le même rang.
- Savoir et bien comprendre les finesses suivantes. Si A est une matrice donnée et que l'on appelle respectivement R et S leur matrice échelonnée et réduite (par lignes pour R et par colonnes pour S) alors :
  – il n'y a aucune raison pour que R et S soient égales ;
  – il n'a aucune raison pour que R et S soient transposée l'une de l'autre ;
  – en revanche ***toutes ces matrices ont le même rang***.

Exercices à savoir refaire

Exercices du chapitre I – Presque tous les exercices ont été corrigés en classe.

Questions de cours exigibles (énoncé précis et démonstration)

Q26. Condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) pour l'inversibilité d'une matrice diagonale. [Exemple **5** page **22**]

Q27. Sous réserve d'inversibilité, déterminer ***par la méthode du système linéaire*** l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Q28. Sous réserve d'inversibilité, déterminer ***par la méthode du pivot matriciel simultané*** l'inverse de la matrice suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$