Objectifs et savoir-faire

Chapitre J – Nombres réels et suites numériques
*Reprise **intégrale** des objectifs et savoir faire détaillés dans le programmes de colle précédent.*

À cela s'ajoute :

Théorème de convergence

- Déterminer une limite à l'aide d'un encadrement (théorème des « gendarmes »).
- Démontrer qu'une suite tend vers $+\infty$ en la minorant par une suite qui tend vers $+\infty$.
- Démontrer qu'une suite tend vers $-\infty$ en la majorant par une suite qui tend vers $-\infty$.
- Comprendre la définition d'une suite extraite de la manière suivante : on conserve certains éléments de la suite et on en supprime d'autres sans changer l'ordre.
- Connaître la définition rigoureuse d'une suite extraite à l'aide d'une fonction d'extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui doit être strictement croissante.
- Exploiter que si une suite à une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toutes ses suites extraites convergent vers ℓ.
- Démontrer qu'une suite n'a pas de limite en utilisant deux suites extraites ayant des limites différentes.
- Démontrer qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en démontrant que ses deux suites extraites $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers ℓ.
- Obtenir une limite par composition d'une suite et d'une fonction. Cas particulier d'une fonction continue.
- Maitriser le théorème de la limite monotone. En particulier bien retenir qu'en cas de croissance la limite est la borne supérieure (et la borne inférieure en cas de décroissance).
- Bien retenir qu'en cas de monotonie, une suite a toujours une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Dans le cas croissante et non majorée la suite tend vers $+\infty$ (et $-\infty$ dans le cas décroissante et non minorée).
- Connaître la définition de deux suites adjacentes (trois hypothèses).
- Être capable d'appliquer le théorème des suites adjacentes (trois conclusions).

Suites arithmético-géométrique

- Connaître la définition d'une suite arithmético-géométrique.
- Savoir dans quel cas on obtient une suite géométrique et dans quel cas on obtient une suite arithmétique.
- Savoir étudier une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin d'obtenir une formule explicite de u_n en fonction de n.

Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

- Connaître la définition et savoir identifier des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (avec $b \neq 0$)
- En fonction du discriminant de l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$, connaître une formule explicite de u_n en fonction de l'entier n.
- Même s'il y a quelques différences, constater l'analogie avec le théorème de résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.
- À condition que les deux premiers termes u_0 et u_1 soient connues, être capable d'expliciter l'expression de u_n en fonction de $\mathbb{N}$.

Suites vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

- Savoir exploiter le fait que si f est continue et que (u_n) converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$, alors cette limite ℓ est nécessairement solution de l'équation $f(x) = x$.
- Dans le cas d'un exercice non détaillé, connaître les différentes étapes clefs pour étudier une telle suite :
  - identifier la fonction f et étudier ses variations ;
  - déterminer un intervalle J stable par f c'est à dire tel que $f(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$ et tel que $u_0 \in \mathrm{J}$;
  - déterminer les nombres $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $f(\ell) = \ell$ $\big($éventuellement tels que $f \circ f(\ell) = \ell\,\big)$;
  - comparer u_0 et u_1 et utiliser la monotonie de f pour étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\big($éventuellement de $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}\big)$;
  - conclure grâce au théorème de la limite monotone $\big($et éventuellement le théorème **III.2.5** dans le cas de deux suites extraites qui « couvrent » la suite d'origine en entier$\big)$.

Exercices à savoir refaire

Exercices du chapitre J – Tous les exercices ont été traités (sauf J.19, J.20 et J.22).

Questions de cours exigibles (énoncé précis et démonstration)

Q31. Théorème d'encadrement (ou « des gendarmes »).
Q32. Théorème de la limite monotone : toute suite (de réels) croissante et majorée converge.
Q33. Théorème des suites adjacentes.